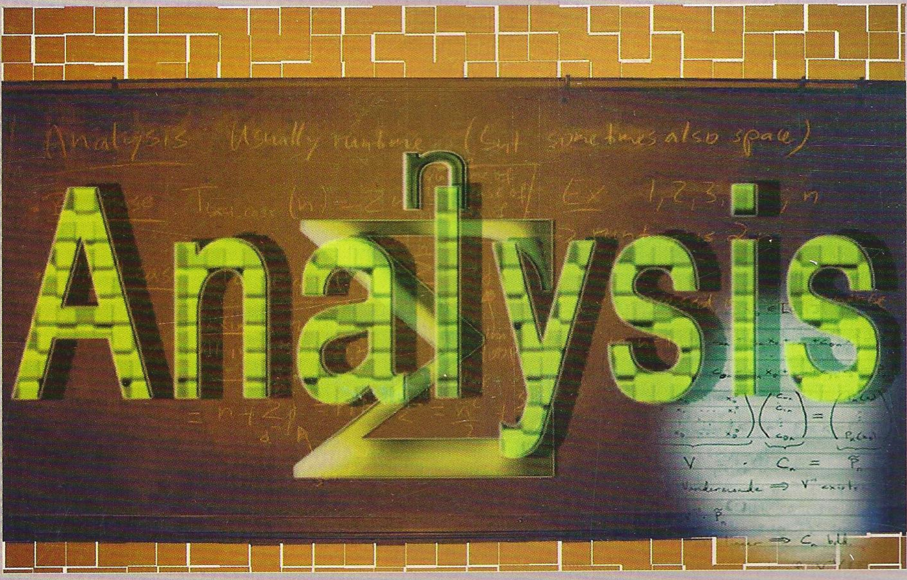
دانشگاه پیام نور

آنالیز عددی ۱

دکتر اسماعیل بابلیان



فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

در دروس ریاضی، نظیر ریاضیات عمومی، مبانی ریاضیات، معادلات دیفرانسیل، آنالیز و... مسائلی چون تعیین ریشه‌های یک معادله، محاسبهٔ مقدار یک انتگرال معین و به دست آوردن جواب کلی یک معادله دیفرانسیل را دیده‌اید. در این دروس، طی چند قضیهٔ وجودی ثابت می‌شود که مثلاً یک معادله چند ریشه دارد یا انتگرال تابع معلومی موجود است یا برای دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل، طی شرایطی، می‌توان جواب به دست آورد. به‌عبارت دیگر، کار درسهای مذکور نظری است و بیشتر به تعیین مدل ریاضی برای مسائل و بحث در وجود، یکتایی و یا عدم وجود جواب برای آنها خلاصه می‌شود، و کمتر به تعیین مقدار ریشه(ها)، مقدار انتگرال، و یا مقدار جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل در نقطهٔ معلوم پرداخته می‌شود. برای به‌دست آوردن جوابهای عددی مسائل مذکور باید روشهایی طراحی و اجرا شوند. لذا، آنالیز عددی به توصیف، تحلیل و طراحی روشهایی می‌پردازد که جوابهای عددی مسائل ریاضی را به‌دست می‌دهند. در درس آنالیز عددی بر آنیم تا آنچه را که وجود آن در آنالیز ریاضی، نظریهٔ معادلات و... به اثبات رسیده است، با به‌کارگیری روشهای عددی مناسب پیدا و ارائه کنیم. بدیهی است که برای تعیین جواب یا جوابهای یک مسئله باید راه حل یا روش (یا الگوریتم) رسیدن به جواب را بدانیم یا طراحی کنیم. از آنجا که روشهای عددی شامل مراحل زیاد و هر مرحله، احیاناً، متضمن انجام عملیات فراوان است لزوم بهره‌گیری از یک ابزار محاسباتی، نظیر ماشین حساب یا کامپیوتر اجتناب‌ناپذیر است.

با پیدایش کامپیوتر و به‌کارگیری آن در محاسبات عددی موضوع آنالیز عددی از اهمیت بیشتری برخوردار شد و تحرک قابل توجهی یافت. اما نباید تصور کرد که آنالیز عددی مبحث تازه‌ای است که همزمان با پیشرفت کامپیوتر پدید آمده است. در واقع، آنالیز عددی با تهیهٔ نتایج به صورت اعداد مرتبط است که بی‌شک توسط بشر اولیه نیز به کار می‌رفته است. در این زمینه بابلیها و مصریان قدیم به خاطر مهارتهای عددی که داشتند، پیشتازند. لوحی بابلی، که تاریخ آن

به تقریباً دوهزار سال قبل از میلاد برمی‌گردد، پیدا شده است که مجذور اعداد صحیح از یک تا شصت را به‌دست می‌دهد. لوح دیگری مؤید ثبت خسوف و کسوفها از حدود سال ۷۵۰ قبل از میلاد است. مصریان کسر را مورد توجه قرار دادند و دربارهٔ بسط یک کسر، به‌صورت مجموع کسرهایی که صورت آنها واحد باشد، روشهایی ارائه کردند که در نوع خود بسیار جالب‌اند. [۱] مصریان روش نابه‌جایی را نیز برای تعیین ریشه‌های یک معادلهٔ غیرخطی ابداع کردند. ریاضیدانان یونان قدیم نیز در این رشته فعال بودند. ارشمیدس، در حدود سال ۲۲۰ قبل از میلاد، کرانهای زیر را برای عدد π ارائه کرد:

$$۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷}$$

روند تکراری

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad ,$$

که در آن $a>۰$، برای محاسبهٔ جذر تقریبی a، که معمولاً به *نیوتن* نسبت داده می‌شود، در واقع حدود صد سال قبل از میلاد توسط هرون مورد استفاده قرار گرفت. فیثاغورسیان محاسبهٔ سریها را مورد توجه قرار دادند و جدولهای مثلثاتی قبل از قرن دهم تنظیم شد.

با توسعهٔ سریع دانش ریاضی و انقلاب علمی در غرب، آنالیز عددی نیز پیشرفت کرد. این پیشرفت مرهون تلاش و توجه دانشمندانی چون *نیوتن*، *اویلر*، *لاگرانژ*، *گاوس* و *بسل* بود که مبین علاقهٔ همه‌جانبه به موضوع آنالیز عددی است. در درس *مبانی کامپیوتر* با تاریخچهٔ محاسبات و اختراعات افرادی چون نپر، *پاسکال* و *لایبنیتز*، که همه در جهت آسان کردن محاسبات بود، آشنا شدید [۱۱]. تدارک ماشینهای محاسب در کارهای عددی انقلابی به وجود آورد که با پیدایش کامپیوتر الکترونیک تشدید شد. با به‌کارگیری کامپیوتر، محاسبات عددی و تحلیل داده‌هایی که تا چند دههٔ قبل حتی تصور انجام آنها در طول عمر یک انسان هم نمی‌رفت به کاری عادی و روزمره تبدیل شد. ضمناً، روشهای عددیِ کارآیی که سالها از ابداع آنها می‌گذشت، امّا به خاطر بستگی آنها به اعداد اصم (گنگ) و نیاز به ثبت ضرایب عددی زیاد، کمتر به‌کار گرفته می‌شدند، مانند روش انتگرالگیری گاوس، با ظهور کامپیوتر متداول شد و گسترش یافت. با وجود این، باید توجه داشت که درس *آنالیز عددی را نباید با برنامه‌نویسی و پردازش اطلاعات* یکی گرفت. امّا کسانی که با طراحی و به‌کارگیری الگوریتمهای عددی سروکار دارند باید در مورد به‌کار گرفتن بهینهٔ کامپیوتر در انجام محاسبات و انتخاب روش مناسب، اطلاعات و تجربهٔ کافی داشته باشند. به همین دلیل است که گفته می‌شود:

آنالیز عددی علم است و محاسبات عددی هنر

در فصول مختلف این کتاب با روشهای متنوعی برای حل یک مسئله، مثلاً تعیین تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$، آشنا خواهید شد. این روشها با استفاده از شهود ریاضی، آنالیز ریاضی و

قضایای آن حاصل می‌شوند، و تقریبی از جواب مسئلهٔ مورد نظر را به دست می‌دهند. با زهم به کمک آنالیز ریاضی اکثراً کران بالایی برای خطای جواب تقریبی قابل محاسبه است. (*اینها جنبه‌های علمی آنالیزعددی رانشان می‌دهند.*)

امّا، برای تعیین جواب یک مسئلهٔ خاص کدام روش را باید به کار برد؟ این موضوع به دید، بینش علمی و تجربهٔ متخصص آنالیز عددی بستگی دارد، که در طول زمان و با ممارست حاصل می‌شود. (*اینها جنبه‌های هنری آنالیز عددی هستند.*)

مقدمه

کتاب حاضر پس از دو بار چاپ آزمایشی، با توجه به نظر اساتیدی که آن را تدریس و دانشجویانی که آن را مطالعه کردند بازنگری و تدوین شده است.
این کتاب شامل ۶ فصل است که خلاصهٔ هر فصل در اینجا آمده است.

فصل اول: خطاها

در این فصل ضمن توجه به منابع خطا و بخصوص ذخیرهٔ اعداد در ماشینهای محاسب که توأم با خطاست، انواع خطاها و تولید و انتشار آنها را که در انجام عملیات روی اعداد تقریبی پیش می‌آیند مورد بررسی قرارمی‌دهیم و توصیه‌های لازم را ارائه می‌کنیم.

فصل دوم: حل عددی معادلات غیرخطی

در این فصل ابتدا به تعیین تعداد و حدود ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f(x)=0$ می‌پردازیم و بعد روشهای گوناگون برای محاسبهٔ ریشه یا ریشه‌های این معادله را، با دقت مطلوب، مورد بررسی قرار می‌دهیم و روشهای متفاوت را از نظر همگرایی و کارایی با هم مقایسه می‌کنیم.

فصل سوم: حل عددی معادلات چندجمله‌ای

تعیین ریشه‌های یک معادلهٔ چندجمله‌ای به صورت $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ از دیرباز مورد توجه بوده است. در این فصل روشهای خاص این معادلات را برای تعیین حدود و تعداد ریشه‌هاو محاسبهٔ ریشه‌های حقیقی آن مطالعه می‌کنیم.

فصل چهارم: درونیابی

این فصل با تشریح *درونیابی* و *برونیابی* شروع و روشهای مختلفی برای تعیین *چندجمله‌ای درونیاب* ارائه می‌شود. کاربردهای درونیابی در قسمتهای مختلف این فصل نشان داده خواهد شد و با مثالهای متنوع کارآیی روشهای متفاوت مورد بررسی قرار خواهدگرفت.

فصل پنجم: مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

این فصل به مشتقگیری و انتگرالگیری عددی اختصاص دارد و در آن روشهای تعیین مشتق یک تابع جدولی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین روشهای تعیین مقادیر تقریبی انتگرال معین توابع جدولی یا توابعی که ضابطهٔ آنهامعلوم است، توصیف خواهد شد و خطای هر روش به دست خواهد آمد. در پایان این فصل دو روش کلی، یعنی روشهای نیوتن ـ کوتز و گاوس، برای تعیین تقریبی از یک انتگرال معین بررسی خواهد شد.

فصل ششم: حل عددی معادلات دیفرانسیل

در این فصل به بررسی حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول با مقدار اولیه می‌پردازیم و کاربرد روشهای *بسط تیلر*، *درونیابی* و *انتگرالگیری* را در به‌دست آوردن فرمولهای مربوط به تعیین مقادیر تقریبی جواب معادلات دیفرانسیل ارائه می‌کنیم.

در پایان مراجعی که مطالب کتاب از آنها گرفته شده است، و یا می‌توان در مورد هر مطلب اطلاعات بیشتری به کمک آنها کسب کرد، آمده است. ضمناً واژه‌نامه‌ای جهت اطلاع دانشجویان تهیه شده است. در این واژه‌نامه اکثر واژه‌های تدوین شده توسط انجمن ریاضی ایران و مرکز نشر دانشگاهی به کار رفته است [۱۵].

در هر فصل مطالبی که در بخشهای ستاره دار عنوان شده‌اند الزاماً مطالب مشکل نیستند ولی مدرس می‌تواند در تدریس اولیه کتاب از آنها بگذرد (بدون اینکه پیوستگی مطالب برهم بخورد). امّا این مطالب معمولاً در امتحانات کارشناسی ارشد مطرح می‌شوند و مطالعهٔ آنها به افرادی که قصد ادامهٔ تحصیل در این رشته را دارند توصیه می‌شود. ضمناً در آخر هر فصل تستهای مربوط به امتحانات مختلف و مسائل تکمیلی، که بیشتر مسائل تشریحی کنکورهای کارشناسی ارشد هستند، اضافه شده است.

در آخر کتاب حل بعضی تمرینات آخر هر بخش را مشاهده می‌کنید. همان‌گونه که ملاحظه خواهید کرد، به دلیل طولانی بودن مراحل به‌دست آوردن جواب بعضی تمرینات، جواب اکثر آنها به اختصار داده شده است (اکثراً، چند تکرار اولیه و بعد جواب تقریبی نهایی ارائه شده است). البته حسن این کار در این است که دانشجویان را ترغیب می‌کند که جوابهای تقریبی را خود نیز محاسبه و باجواب نهایی داده شده مقایسه کنند.

اسماعیل بابلیان

بهمن ۷۲

۱

خطاها

مقدمه

برای تعیین جواب یا جوابهای یک مسئلهٔ واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و پس از تعیین راه حلی مناسب برای رسیدن به جواب، با انجام محاسبات لازم جواب را به‌دست آوریم. در این فرایند خطاهایی پیش می‌آید که انواع متفاوت دارند. آشنایی بامنشأ این خطاها، نحوهٔ بروز آنها و کنترل آنهاموضوع این فصل است.

هدفهای کلی

۱ـ شناخت منابع خطا و تشخیص آنها در هر مسئله
۲ـ بررسی منابع خطا و راههای کمینه‌سازی آنها
۳ـ شناخت انواع خطاها و رابطهٔ آنها با دقت یک تقریب
۴ـ جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی
۵ـ شناخت روشهای محاسبهٔ پایدار و ناپایدار
۶ـ محاسبهٔ مقدار تقریبی توابع

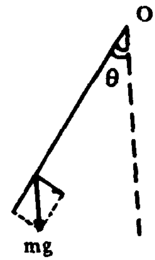
هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:
۱ـ منشأ خطاها را در یک مسئلهٔ واقعی تعیین کند
۲ـ بسط اعداد را در مبناهای مختلف بنویسد و از بسط اعشاری یک عدد، تقریبی مناسب انتخاب کند
۳ـ انواع خطاها را بشناسد و ارتباط آنها را با دقت یک تقریب بداند
۴ـ یک محاسبهٔ عملی را چنان ترتیب و به‌انجام رساند که رشد خطاها حداقل باشد
۵ـ محاسبهٔ توابع و سریها را با حداقل خطا و عملیات انجام دهد

۱ـ۱ منابع خطا

امروزه، تقریباً برای حل هر مسئله‌ای ابتدا یک مدل ریاضی تعیین و بعد با استفاده از روشهای موجود، یا روشهایی که ابداع می‌شوند، به حل آن مدل مبادرت می‌شود. در زیر مراحل به‌دست آوردن مدل ریاضی، و بعد جواب یک مسئلهٔ واقعی را با توضیحات کافی ارائه می‌کنیم.

مسئله تعیین حرکت یک آونگ ساده به طول l و جرم m است که به اندازهٔ زاویهٔ θ از حالت قائم منحرف شده است (شکل ۱ـ۱).



شکل ۱ـ۱

واضح است که هوا در مقابل حرکت آونگ مقاومت می‌کند. ضمناً اصطکاکی بین نخ و نقطهٔ آویز وجود دارد. اما، برای تعیین مدل ریاضی مسئله، با توجه به ناچیز بودن مقاومت هوا و اصطکاک، از مقاومت هوا در مقابل حرکت آونگ و از اصطکاک نقطهٔ آویز چشم‌پوشی می‌کنیم. با ارتکاب این دو خطا، که ما را از مدل واقعی مسئله (هرچند به اندازهٔ ناچیز) دور می‌کنند، به تعیین مدل ریاضی مسئله می‌پردازیم.

با تصویر کردن رابطهٔ $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ روی دو محور عمود بر هم، یکی در امتداد نخ و دیگری قائم بر آن، نیروی $mg \cos \theta$ با نیروی کشش نخ خنثیٰ می‌شود و نیروی $mg \sin \theta$ سبب حرکت آونگ روی قسمتی از محیط یک دایره به مرکز O و شعاع l می‌شود. با توجه به اینکه شتاب حرکت $l\,\theta''$ است داریم:

$$- mg \sin \theta = ml\,\theta'' \qquad (۱.۱)$$

که در آن $\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ و t معرف زمان است و علامت منها برای آن است که جهت شتاب و نیرو متفاوت‌اند. از (۱.۱) نتیجه می‌شود:

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta \qquad (۲.۱)$$

اگر بخواهیم θ را بر حسب t از (۲.۱) به‌دست آوریم باید یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم غیرخطی را حل کنیم. اما، در مکانیک مقدماتی، برای ساده شدن مدل ریاضی مسئله θ کوچک گرفته می‌شود که در نتیجه می‌توان، با تحمل خطایی جدید به جای $\sin \theta$ مقدار θ را (بر حسب

رادیان) قرار داد تا معادلهٔ سادهٔ زیر حاصل شود.

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta \qquad (۳.۱)$$

با فرض $\frac{g}{l}=\omega^2$ معادلهٔ (۳.۱) به معادلهٔ مرتبهٔ دوم خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\theta'' = \omega^2 \theta$$

که جواب عمومی آن عبارت است از (با جایگذاری مي‌توان آزمایش کرد):

$$\theta = A \sin \omega t + B \cos \omega t \qquad (۴.۱)$$

که در آن $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ و A و B دو مقدار ثابت هستند که با توجه به شرایط اولیه (یعنی وضع آونگ در شروع حرکت) قابل محاسبه‌اند. اما، آنچه از (۴.۱) معلوم می‌شود آن است که حرکت آونگ نوسانی است. و دورهٔ، تناوب آن عبارت است از:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (۵.۱)$$

تاکنون خطاهایی که مرتکب شده‌ایم **خطای مدل** نامیده می‌شوند. لازم به تذکر است که تشخیص عوامل مؤثر در تعیین مدل ریاضی یک مسئله همیشه به این سادگی نیست و گاهی چشم‌پوشی از یک عامل ممکن است مدل مسئله را به کلی تغییر و جوابی به دست دهد که با جواب واقعی تفاوت فاحش داشته باشد. این‌گونه مسائل به مسائل بدوضع یا بدخیم معروف‌اند. یک نمونه از این مسائل را در فصل سوم بررسی خواهیم کرد.

خطاهای دیگر زمانی ظاهر می‌شوند که بخواهیم مقدار T را از (۵.۱)، به ازای مقادیر معینی از l و g حساب کنیم.

می‌دانیم که طول نخ، یعنی l، و مقدار g، یعنی ثابت ثقل، از طریق اندازه‌گیری به‌دست می‌آیند. این دو کمیت را **داده‌ها** یا **مفروضات مسئله** می‌نامند. به‌طور کلی، به دلیل نادقیق بودن وسایل اندازه‌گیری، داده‌ها دارای خطا هستند که مقدار این خطا به وسیله اندازه‌گیری و دقت اندازه‌گیری بستگی دارد. از این‌رو، **منبع دوم خطا، داده‌ها هستند.**

اعداد ۲ و π را که در فرمول (۵.۱) دیده می‌شوند، و جزء مفروضات مسئله نیستند، ثابتهای فرمول (۵.۱) می‌گویند. وقتی بخواهیم T را حساب کنیم باید به‌جای π، تقریبی از آن، مثلاً $\frac{۲۲}{۷}$ یا ۳/۱۴، قرار دهیم. لذا، خطایی مُرتکب می‌شویم که مربوط به نمایش اعداد است (برای توضیح بیشتر به ۱ـ۲ مراجعه کنید).

منبع خطای بعدی اعمال حسابی هستند. فرض کنید l و g هریک با دو رقم اعشار داده شده‌اند. در این صورت، معمولاً، $\frac{l}{g}$ را نیز تا دو رقم اعشار منظور می‌کنند. اما، $\frac{l}{g}$، حتی اگر l و g شامل هیچ خطایی نباشند، معمولاً بیش از دو رقم اعشار دارد و در نتیجه با منظور کردن فقط دو رقم اعشار خطایی مرتکب می‌شویم. در ضرب اعداد اعشاری نیز چنین خطایی پیش می‌آید.

بالاخره در محاسبهٔ جذر $\frac{l}{g}$ باید روشی اختیار کنیم. برای توضیح بیشتر فرض کنید ۲ $=\frac{l}{g}$

و دو روش را برای محاسبهٔ جذر ۲ ارائه می‌کنیم. روش (الف) همان روش آموزش داده شده در دورهٔ راهنمایی است و روش دوم حالت خاصی از **روش تکراری نیوتن** است که در فصل دوم با آن آشنا خواهید شد.

$\sqrt{۲/۰۰۰۰۰۰}$	۱/۴۱۴
۱-	۱ × ۲ = ۲
۱۰۰	۲۴ × ۴ = ۹۶
۹۶-	۱۴ × ۲ = ۲۸
۴۰۰	۲۸۱ × ۱ = ۲۸۱
۲۸۱-	۱۴۱ × ۲ = ۲۸۲
۱۱۹۰۰	۲۸۲۴ × ۴ = ۱۱۲۹۶
۱۱۲۹۶-	روش (الف)
۰/۰۰۰۶۰۴	

$$x_0 = ۱$$
$$x_{n+1} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{۲}{x_n}\right)$$
$$x_1 = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$
$$x_2 = ۱/۴۱۶۶۶۶\ \ldots$$
$$x_3 = ۱/۴۱۴۲۱۵۶۸۶\ \ldots$$
$$x_4 = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲\ \ldots$$

روش (ب)

می‌بینید که، باتوجه به مقدار $\sqrt{۲}$ یعنی ... ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲، از دو روش (الف) و (ب) جوابهای‌تقریبی متفاوتی برای $\sqrt{۲}$ به دست می‌آید. روش (الف) هر بار یک رقم از بسط اعشاری $\sqrt{۲}$ را می‌دهد ولی روش (ب) در تکرار سوم، پنج رقم از بسط اعشاری $\sqrt{۲}$ و در تکرارچهارم، نه رقم اعشار از بسط $\sqrt{۲}$ را به دست می‌دهد. از این‌رو، خطای جوابهای تقریبی به دست آمده به روش محاسبه، و مرحله‌ای که عملیات متوقف می‌شوند، بستگی دارد. این خطاها مربوط به روش هستند.

بنابر آنچه گفته شد فهرست منابع خطا چنین است:

الف) خطای مدل

این خطا شامل صرفنظر کردنها، چشم‌پوشیها و ساده‌نویسیها جهت تعیین مدل ریاضی مسئله است.

ب) خطای داده‌ها

این خطا به هنگام اندازه‌گیری و برآورد مفروضات مسئله پیش می‌آید.

پ) خطای نمایش اعداد

نمایش اعشاری یا دودوئی اکثر اعداد با تعدادی متناهی رقم امکان‌پذیر نیست. از این‌رو، انتخاب تعدادی متناهی از ارقام بسط یک عدد سبب این خطا می‌شود.

ت) خطای اعمال حسابی

حاصل بعضی اعمال بر دو عامل عددی دارای تعدادی نامتناهی رقم است و انتخاب تعدادی متناهی از این ارقام سبب این خطا می‌شود.

ث) خطای روش

روشهای عددی عموماً تکراری هستند و تقریبی از جواب دقیق را به دست می‌دهند. دقت این تقریب به نوع روش و مرحلهٔ توقف آن بستگی دارد.

۱-۱-۱ تبصره

اگر ضمن انجام عملیات بر روی عدد ۲۳۳، آن را ۲۲۳ منظور کنیم یک اشتباه مرتکب شده‌ایم نه خطا. همچنین اشکالاتی که در اثر تغییر ناگهانی و شدید ولتاژ برق برای کامپیوترها پیش می‌آید و بعضاً موجب نتایج عددی غلط می‌شود را خطا نمی‌نامیم. در این فصل تنها به بررسی خطاها می‌پردازیم.

از پنج منبع خطایی که ذکر شد خطای مدل و خطای داده‌ها به نوع مسئله بستگی دارند و افرادی که در رشته‌های مختلف به تعیین مدل مسئله می‌پردازند مسئول آنها هستند. اما، سه خطای بعدی مربوط به آنالیز عددی است. در این فصل خطای نمایش اعداد و خطای اعمال حسابی رامورد بررسی دقیق قرار می‌دهیم. معمولاً خطای هر روش هنگام بررسی آن روش مورد بحث قرار می‌گیرد و کران بالایی برای خطای جوابهای تقریبی به‌دست می‌آید.

۱-۲ نمایش اعداد

در اکثر مسائل، که در آنها جواب عددی مورد نظر است، معمولاً تعداد عملیات و نوع آنها به گونه‌ای است که انجام آنها با دست و به کمک قلم و کاغذ بسیار مشکل و گاهی غیرممکن است. برای تعیین جواب عددی مسائل از ماشین حساب یا کامپیوتر استفاده می‌شود، که از این به بعد به آنها وسایل محاسباتی می‌گوییم.

همان‌طور که می‌دانید کار با کسرهای متعارفی و اعدادگنگ (اصم) توسط ماشین حساب و کامپیوتر عملی نیست (البته کار با کسرها به‌طور محدود در ماشین حسابها امکان دارد)، ولی به راحتی می‌توان با اعداد اعشاری کار کرد.

۱-۲-۱ بسط اعشاری اعداد

منظور از بسط اعشاری یک عدد مثبت نمایش آن به شکل

$$a_m \times ۱۰^m + a_{m-۱} \times ۱۰^{m-۱} + \dots$$

است که در آن

$$a_m \neq ۰ ,\ m \in Z ,\ ۰ \leq a_i \leq ۹$$

بسط فوق برای اعداد صحیح و اعشاری راحت است. مثلاً،

$$۲۳۴۷ = ۲\times ۱۰^{۳}+۳\times ۱۰^{۲}+۴\times ۱۰^{۱}+۷\times ۱۰^{۰}$$
$$۳۷/۴۰۹= ۳\times ۱۰^{۱}+۷\times ۱۰^{۰}+۴\times ۱۰^{-۱}+۹\times ۱۰^{-۳}$$

امّا برای اعداد کسری و گنگ باید وجود و نحوهٔ به دست آوردن بسط اعشاری را توضیح دهیم. در مورد وجود و یکتائی بسط اعشاری برای هر عدد حقیقی مثبت قضیه زیر را داریم.

۱-۲-۲ قضیه

اگر A عددی حقیقی و مثبت باشد دارای بسط اعشاری منحصر به‌فرد زیر است (ر.ک. [۱۲] ص ۵۷۳):

$$A= a_m \times ۱۰^{m}+a_{m-۱}\times ۱۰^{m-۱}+\cdots \qquad (۶.۱)$$

که در آن $a_m \neq ۰$، $۰ \le a_i \le ۹$ و بی‌نهایت بار $a_i \neq ۹$. شرط بی‌نهایت بار $a_i \neq ۹$ برای یکتائی بسط لازم است زیرا، طبق فرمول حد مجموع یک سری هندسی داریم:

$$۰/۹۹۹۹۹۹\cdots = ۰/۹+۰/۰۹+۰/۰۰۹+\cdots=\frac{۰/۹}{۱-۰/۱}=۱$$

یعنی، اگر شرط مذکور را برداریم برای عدد یک دو بسط اعشاری خواهیم داشت. همچنین داریم.

$$۰/۲۷ = ۰/۲۶۹۹۹۹\ldots \quad \text{و} \quad ۰/۴۵ = ۰/۴۴۹۹۹۹\ldots$$

وبه‌طور کلی، هر عدد اعشاری مختوم (با تعدادی متناهی رقم) دارای دو بسط اعشاری خواهد بود.

۱-۲-۳ مثال

$$\frac{۲۲}{۷}=۳/\overline{۱۴۲۸۵۷} \quad \text{و} \quad \frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶۶\cdots=۰/\overline{۶}$$

منظور از $\overline{۱۴۲۸۵۷}$ آن است که دسته ارقام ۱۴۲۸۵۷، با همین ترتیب، مرتباً تکرار می‌شوند، همچنین در مورد $\overline{۶}$.

$$\frac{۲۳}{۵}=۴/۶ \quad \text{و} \quad \frac{۳۰۱۷}{۱۹۸}=۱۵/۲\overline{۳۷} \quad \text{و} \quad \sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲\cdots$$

در مثالهای بالا بسط $\frac{۲۳}{۵}$ مختوم و بسط بقیهٔ اعداد نامختوم است. بسط $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۲۲}{۷}$ و $\frac{۳۰۱۷}{۱۹۸}$ نامختوم و متناوب است اما بسط $\sqrt{۲}$ نامختوم است ولی متناوب نیست (به قضیهٔ زیر و

نتیجهٔ آن توجه کنید).

۱-۲-۴ قضیه
اگر بسط اعشاری عدد A مختوم یا نامختوم و متناوب باشد، A یک عدد گویاست.

برهان
ابتدا فرض می‌کنیم که بسط اعشاری A مختوم باشد. مثلاً،

$$A=a_1 a_2 \cdots a_m / b_1 b_2 \cdots b_n$$

که در آن $a_1, a_2, ..., a_m$ ارقام قسمت صحیح A و $b_1, b_2, ..., b_n$ ارقام بعد از ممیز هستند. با این توضیحات داریم:

$$A=a_1 a_2 \cdots a_m + 0/b_1 b_2 \cdots b_n$$

$$A-a_1 a_2 \cdots a_m = 0/b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{10^n}$$

$$A=\frac{10^n \times a_1 a_2 \cdots a_m + b_1 b_2 \cdots b_n}{10^n}$$

چون صورت و مخرج کسر اعداد صحیح هستند A گویاست.

حال فرض کنید بسط اعشاری A نامختوم و متناوب باشد. مثلاً

$$A=a_1 a_2 \cdots a_m / b_1 b_2 \cdots b_n c_1 c_2 \cdots c_k \quad (7.1)$$

طبق قرار داد قبلی ارقام $c_1 c_2 ... c_k$ مرتباً تکرار می‌شوند (توجه کنید که ممکن است m یا n صفر باشد که در این صورت $a_1 ... a_m$ یا $b_1 ... b_n$ وجود نخواهد داشت). از (7.1) نتیجه می‌شود

$$A-a_1 a_2 \cdots a_m / b_1 b_2 \cdots b_n = 10^{-n} \times 0/c_1 c_2 \cdots c_k$$

ضمناً داریم:

$$c_1 c_2 \cdots c_k = c_1 c_2 \cdots c_k \left(\frac{1}{10^k}+\frac{1}{10^{2k}}+\cdots\right)$$

حد مجموع سری داخل پرانتز برابر است با

$$\frac{\frac{1}{10^k}}{1-\frac{1}{10^k}}=\frac{1}{10^k-1}$$

بنابراین،

$$c_۱ c_۲ \cdots c_k = \frac{c_۱ c_۲ \cdots c_k}{۱۰^k - ۱}$$

در نتیجه،

$$A = a_۱ a_۲ \cdots a_m / b_۱ b_۲ \cdots b_n + \frac{c_۱ c_۲ \cdots c_k}{۱۰^n (۱۰^k - ۱)} \qquad (۸.۱)$$

که نشان می‌دهد A گویاست. (چرا؟)

عکس نقیض قضیهٔ ۱-۲-۴ نتیجهٔ مهم زیر را به دست می‌دهد.

۱-۲-۵ نتیجه

اگر A عددی گنگ باشد بسط اعشاری آن نامختوم است ولی متناوب نیست.

یکی از مسائلی که در این قسمت مطرح می‌شود نوشتن کسر مساوی یک عدد اعشاری نامختوم و متناوب است. نحوهٔ به دست آمدن این کسر در قضیهٔ زیر آمده‌است.

۱-۲-۶ قضیه

اگر $A = a_۱ \cdots a_m / b_۱ \cdots b_n c_۱ \cdots c_k$، آنگاه

$$A = a_۱ \cdots a_m + \frac{b_۱ \cdots b_n c_۱ \cdots c_k - b_۱ \cdots b_n}{\underbrace{۹۹ \cdots ۹}_{k\ \text{تا}}\ \underbrace{۰۰ \cdots ۰}_{n\ \text{تا}}} \qquad (۹.۱)$$

برهان

بنابر قضیه ۱-۲-۴ :

$$۰/b_۱ \cdots b_n c_۱ \cdots c_k = ۰/b_۱ \cdots b_n + \frac{c_۱ \cdots c_k}{۱۰^n (۱۰^k - ۱)}$$

$$= \frac{\left(۱۰^{n+k} - ۱۰^n\right) \times ۰/b_۱ \cdots b_n + c_۱ \cdots c_k}{۱۰^n \left(۱۰^k - ۱\right)} = \frac{۱۰^k \times b_۱ \cdots b_n + c_۱ \cdots c_k - b_۱ \cdots b_n}{۱۰^n \left(۱۰^k - ۱\right)}$$

$$= \frac{b_۱ \cdots b_n c_۱ \cdots c_k - b_۱ \cdots b_n}{۱۰^n \left(۱۰^k - ۱\right)}$$

واضح است که، $\underbrace{۹۹ \ldots ۹}_{k\ \text{تا}}\ \underbrace{۰۰ \ldots ۰}_{n\ \text{تا}} = ۱۰^n (۱۰^k - ۱)$ و حکم ثابت شده است.

۱ـ۲ـ۷ مثال

۱ـ کسر مربوط به عدد اعشاری ۳/۵۷ را به دست آورید.

بنابر رابطهٔ (۸.۱) داریم:

$$3/07 = 3/0 + \frac{7}{10(10-1)} = 3 + \frac{7}{90} = \frac{277}{90}$$

و یا بنابر رابطهٔ (۹.۱):

$$3/07 = 3 + \frac{07-0}{90} = \frac{277}{90}$$

۲ـ کسری را به‌دست آورید که بسط اعشاری آن ۱۵/۲۳۷ باشد.

با توجه به قضیهٔ ۱ـ۲ـ۶ داریم:

$$m = 2 ،\ a_1a_2 = 15 ،\ n = 1 ،\ b_1 = 2 ،\ k = 2 ،\ c_1c_2 = 37$$

بنابر (۹.۱):

$$15/237 = 15 + \frac{237-2}{990} = 15 + \frac{235}{990} = 15 + \frac{47}{198}$$
$$= \frac{3017}{198}$$

۱ـ۲ـ۸ خودآزمایی

۱ـ بسط اعشاری اعداد زیر را به دست آورید.

$$\frac{3}{11} ،\ \frac{1}{13} ،\ \frac{3}{7} ،\ \frac{23}{11}$$

۲ـ بسط اعشاری چند عدد در زیر داده شده است کسر مربوط به آنها را به‌دست آورید.

$$25/32 \ ,\ 7/12 \ ,\ 0/006 \ ,\ 0/178$$

۱ـ۳ بسط اعداد در مبنای ۲

قضیهٔ ۱ـ۲ـ۴ و نتیجهٔ ۱ـ۲ـ۵ نشان می‌دهند که بسط اعشاری تمامی اعداد گنگ و بسیاری از اعداد گویا نامختوم است. در این بخش خواهید دید که در مبنای ۲ وضع از این هم بدتر است! به این معنا که بسط اکثر اعداد اعشاری مختوم در مبنای ۲ نامختوم است.

۱ـ۳ـ۱ بسط اعداد صحیح در مبنای ۲

یک روش، تقسیمات متوالی و کنار هم گذاشتن باقیمانده‌هاست، که همه با آن آشنا هستید (ر. ک. [۹] ص ۹۴ تا ۱۱۹). اما، این روش قابل تعمیم به اعداد غیرصحیح نیست. در اینجا روشی را، طی چند مثال، ارائه می‌کنیم که قابل تعمیم به اعداد غیرصحیح نیز هست. یعنی، با استفاده از

آن می‌توان بسط اعداد اعشاری را در مبنای ۲ نیز به‌دست آورد.

۱-۳-۲ مثال

۱ـ عدد ۳۹ را به مبنای ۲ ببرید.

بزرگترین عدد به صورت ۲^k که از ۳۹ بیشتر نیست $۲^۵$ می‌باشد. لذا می‌نویسیم

$$۳۹ = ۲^۵ + ۷$$

همچنین بزرگترین عدد به صورت ۲^k که از ۷ بیشتر نیست $۲^۲$ است. پس،

$$۳۹ = ۲^۵ + ۲^۲ + ۳$$

ضمناً واضح است که $۲^۰ + ۲^۱ = ۳$. بنابراین،

$$۳۹ = ۲^۵ + ۲^۲ + ۲^۱ + ۲^۰ = ۱۰۰۱۱۱_۲$$

(برای هر توانی از ۲ که وجود نداشته باشد در بسط عدد رقم صفر منظور می‌شود).

۲ـ عدد ۴۸ را در مبنای ۲ بنویسید.

طبق آنچه در مثال قبل عمل شد داریم:

$$۴۸ = ۲^۵ + ۱۶ = ۲^۵ + ۲^۴ = ۱۱۰۰۰۰_۲$$

۳ـ عدد ۰/۷۵ را در مبنای ۲ بنویسید.

باز هم بزرگترین عدد به صورت ۲^k را که کمتر از ۰/۷۵ باشد به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه $۰/۵ = \frac{۱}{۲} = ۲^{-۱}$ می‌نویسیم،

$$۰/۷۵ = ۲^{-۱} + ۰/۲۵$$

در ضمن $۰/۲۵ = \frac{۱}{۴} = ۲^{-۲}$ پس،

$$۰/۷۵ = ۲^{-۱} + ۲^{-۲} = ۰/۱۱_۲$$

۴ـ عدد ۹/۶۲۵ را در مبنای ۲ بنویسید.

بنابر مثالهای قبل داریم:

$$۹ = ۲^۳ + ۱ = ۲^۳ + ۲^۰ = ۱۰۰۱_۲$$

و

$$۰/۶۲۵ = ۰/۵ + ۰/۱۲۵ = ۲^{-۱} + ۲^{-۳} = ۰/۱۰۱_۲$$

بنابراین،

$$۹/۶۲۵ = ۱۰۰۱/۱۰۱_۲$$

بنابر آنچه در مثالهای بالا دیدید برای بردن یک عدد به مبنای ۲ کافی است که جدول ۱-۲ از اعداد را در نظر داشته باشیم و طبق آنچه گفته شد عمل کنیم.

جدول ۱ـ۲

۰	۰
۰	۰
۰	۰
۱۶	2^{4}
۸	2^{3}
۴	2^{2}
۲	2^{1}
۱	2^{0}
۰/۵	2^{-1}
۰/۲۵	2^{-2}
۰/۱۲۵	2^{-3}
۰/۰۶۲۵	2^{-4}
۰/۰۳۱۲۵	2^{-5}
۰	۰
۰	۰
۰	۰

اما، بردن اعداد اعشاری به مبنای دو همیشه به سادگی مثالهای بالا نیست. به مثال بعدی توجه کنید.

۵ـ عدد ۰/۳۴ را در مبنای دو بنویسید.

با توجه به جدول ۱ـ۲ داریم:

$$\begin{aligned} 0{/}34 &= 0{/}25 + 0{/}09 = 0{/}25 + 0{/}0625 + 0{/}0275 \\ &= 0{/}25 + 0{/}0625 + 0{/}015625 + 0{/}011875 \\ &= 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \cdots = (0{/}010101\cdots)_2 \end{aligned}$$

همان‌طور که از مثال بالا پیداست معلوم نیست که بسط ۰/۳۴ در مبنای دو مختوم است یا نامختوم، و اگر نامختوم است متناوب است یا نه. در ضمن در هر مرحله پیداکردن باقیمانده و یافتن رقم بعد، با استفاده از جدول ۱ـ۲، کار راحتی نیست. در زیر روش آسانتری برای تعیین

بسط اعداد در مبنای دو ارائه می‌کنیم.

۱-۳-۳ بسط اعداد در مبنای دو

در این قسمت روشی را شرح می‌دهیم که به سادگی بسط هر عدد بین ۰ و ۱ را در مبنای دو به دست می‌دهد و به راحتی قابل تعمیم به تعیین بسط یک عدد حقیقی در مبنای دلخواه r است که در آن $1<r\in N$. از همه مهمتر اینکه این روش تکراری است و با طبیعت کامپیوتر به عنوان وسیله‌ای سریع برای انجام کارهای تکراری سازگار است.

با توجه به مطالب بالا، کافی است بسط A را که

$$0 < A < 1$$

در مبنای دو به دست آوریم. فرض کنید بسط مورد نظر چنین باشد:

$$A = [0/b_1 b_2 b_3 \dots]_2$$

به عبارت دیگر

$$A = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + b_3 \times 2^{-3} + \dots \tag{10.1}$$

با ضرب طرفین (۱۰.۱) در ۲ به دست می‌آوریم:

$$2A = b_1 + b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \dots$$

قرار می‌دهیم:

$$x = b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \dots$$

و ادعا می‌کنیم که $0 \leq x < 1$. واضح است که چون همواره $b_i \geq 0$ باید $x \geq 0$ همچنین با توجه به اینکه باید بی‌نهایت بار $b_i \neq 1$ (این شرط معادل بی‌نهایت بار $a_i \neq 9$ در مبنای دو است)،

$$x < 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

بنابراین،

$$2A = b_1 + x, \quad (0 \leq x < 1)$$

در نتیجه، جزء صحیح دو طرف یکسان است، یعنی:

$$[2A] = [b_1 + x].$$

چون b_1 صحیح است و $0 \leq x \leq 1$ داریم:

$$[b_1 + x] = b_1 + [x] = b_1$$

پس،

$$b_1 = [2A] \tag{11.1}$$

با به‌دست آمدن b_1 می‌توان (۱۰.۱) را چنین نوشت:

$$۲A-b_۱=b_۲\times ۲^{-۱}+b_۳\times ۲^{-۲}+...$$

با مقایسه این تساوی و (۱۰.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$b_۲=\left[۲(۲A-b_۱)\right]$$

لذا، اگر $۲A-b_۱$ را مجدداً A بنامیم، یعنی $A \leftarrow ۲A-b_۱$، آنگاه:

$b_۲= [۲A]$

واضح است که اگر در مرحله‌ای $A=۰$، کار تمام است و بسط A در مبنای دو مختوم است. اگر همواره $A\neq ۰$ می‌توان این عمل را تا آنجاکه مایل باشیم ادامه دهیم. در عمل تعدادی متناهی از ارقام بسط A حساب می‌شود، مثلاً n رقم.

با توجه به آنچه شرح داده شدالگوریتم زیر را برای تعیین n رقم از بسط عدد A، که $۰<A<۱$، در مبنای دو داریم.

۱ـ شروع کنید

۲ـ A و n را بگیرید

۳ـ برای i از ۱ تا n کارهای زیر را انجام دهید

الف) $b \leftarrow [۲ A]$

ب) b را بنویس

ج) $A \leftarrow ۲A - b$

د) اگر $A=۰$ عملیات را خاتمه بده

۴ـ پایان

برنامه ذیل بر اساس الگوریتم بالا، به زبان GWBASIC، نوشته شده است. ضمناً، خروجی برنامه را برای چند عدد ملاحظه می‌کنید

```
10 INPUT A,n
20 PRINT A; " = (0." ;
30 FOR I= 1 TO n
40 LET B= INT (2 * A)
50 PRINT B;
60 LET A= 2 * A-B
70 IF A= 0 THEN GOTO 100
80 NEXT I
```

```
90 PRINT "..." ;
100 PRINT") IN BASE 2."
110 END
RUN
? .75 , 15
.75= (0.11) IN BASE 2.
OK
RUN
? .625, 15
.625= (0.101) IN BASE 2.
OK
RUN
? .1, 15
.1= (0.000 1100 1100 1100 ...) IN BASE 2.
OK
```

۱ـ۳ـ۴ تذکر

با تبدیل عدد ۲ به عدد طبیعی $R>۱$ می‌توان بسط A را در مبنای R به‌دست آورد. (به مثالهای ۲ و ۳ از ۱ـ۳ـ۵ توجه کنید)

۱ـ۳ـ۵ مثال

۱ـ بسط عدد $\frac{۳}{۷}$ را در مبنای ۲ بنویسید.

قرار می‌دهیم $A=\frac{۳}{۷}$، در نتیجه

$$b_۱=[۲A]=[\frac{۶}{۷}]=۰$$

که از آن نتیجه می‌شود، $۲A-b_۱=\frac{۶}{۷}$. پس مقدار جدید A برابر $\frac{۶}{۷}$ است.

$$b_۲=[۲A]=[\frac{۱۲}{۷}]=۱$$

بنابراین،

$$۲A-b_۲=\frac{۱۲}{۷}-۱=\frac{۵}{۷}$$

و

$$b_۳=[۲A]=[\frac{۱۰}{۷}]=۱$$

و $\frac{۳}{۷} = ۲A - b_۳$. چون به مقدار اولیه A رسیدیم داریم:

$$\frac{۳}{۷}=(۰/۰۱۱۰۱۱۰۱۱...)_۲=(۰/۰\dot{1}\dot{1})_۲$$

که، همانند آنچه در مبنای ۱۰ داشتیم، منظور از $\dot{0}\dot{1}\dot{1}$ آن است که دسته ارقام ۰۱۱ مرتباً تکرار می‌شوند. عملیات بالا نشان می‌دهند که بسط $\frac{۳}{۷}$ در مبنای دو نامختوم و متناوب است. عملیات مربوط به تعیین ارقام بسط A در یک مبنا را می‌توان با یک جدول، نظیر جدول (۱-۳)، نمایش داد.

جدول (۱-۳)

A	i	۲A	b= [۲A]	۲A–b
$\frac{۳}{۷}$	۱	$\frac{۶}{۷}$	۰	$\frac{۶}{۷}$
$\frac{۶}{۷}$	۲	$\frac{۱۲}{۷}$	۱	$\frac{۵}{۷}$
$\frac{۵}{۷}$	۳	$\frac{۱۰}{۷}$	۱	$\frac{۳}{۷}$
$\frac{۳}{۷}$				

۲ـ بسط عدد ۰/۳ را در مبنای ۵ به‌دست آورید. قرار می‌دهیم ۰/۳ =A و ۵ = R، داریم:

A	i	۵A	b= [۵A]	۵A–b
۰/۳	۱	۱/۵	۱	۰/۵
۰/۵	۲	۲/۵	۲	۰/۵
۰/۵				

بنابراین،

$$۰/۳ = (۰/۱۲۲۲...)_۵ = (۰/۱\dot{۲})_۵$$

۳ـ بسط کسر $\frac{۱}{۷}$ را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید.

در این مثال، $A=\frac{۱}{۷}$ و ۱۰ = R، جدول زیر را داریم:

A	i	$10A$	$b=[10A]$	$10A-b$
$\frac{1}{7}$	۱	$\frac{10}{7}$	۱	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{7}$	۲	$\frac{30}{7}$	۴	$\frac{2}{7}$
$\frac{2}{7}$	۳	$\frac{20}{7}$	۲	$\frac{6}{7}$
$\frac{6}{7}$	۴	$\frac{60}{7}$	۸	$\frac{4}{7}$
$\frac{4}{7}$	۵	$\frac{40}{7}$	۵	$\frac{5}{7}$
$\frac{5}{7}$	۶	$\frac{50}{7}$	۷	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{7}$				

بنابراین،

$$\frac{1}{7} = 0/\dot{1}42857\dot{}$$

البته بسط بالا را با تقسیم ۱ بر ۷ نیز می‌توان به‌دست آورد (امتحان کنید).

۴ـ بسط عدد اعشاری ۰/۱ را در مبنای ۲ به‌دست آورید.

جدول زیر بسط مطلوب را به‌دست می‌دهد.

A	i	$2A$	$b=[2A]$	$2A-b$
۰/۱	۱	۰/۲	۰	۰/۲
۰/۲	۲	۰/۴	۰	۰/۴
۰/۴	۳	۰/۸	۰	۰/۸
۰/۸	۴	۱/۶	۱	۰/۶
۰/۶	۵	۱/۲	۱	۰/۲
۰/۲				

بنابراین،

$$0/1 = (0/000110011001 1\ldots)_2 = (0/0\dot{0}01\dot{1})_2$$

توجه کنید که ساده‌ترین عدد اعشاری، یعنی ۰/۱، دارای بسطی نامختوم در مبنای دو است. ثابت می‌شود که بسط هر عدد گویا در هر مبنایی مختوم یا نامختوم و متناوب است [۸].

با توجه به اینکه تعدادی محدود از ارقام بسط هر عدد در مبنای دو قابل نگهداری در

حافظهٔ وسایل محاسباتی است، نتیجه می‌گیریم که تقریباً تمامی اعداد غیرصحیح به‌طور تقریبی در حافظهٔ این وسایل ذخیره می‌شوند و این یکی از ضعفهای مهم این وسایل است که در عمل باعث مشکلات زیادی می‌شود. بعداً خواهیم دید که خطای جزئی که در ذخیرهٔ اعداد پیش می‌آید گاهی سبب به دست آوردن جوابهای غیرقابل قبول برای بعضی مسائل می‌شود. یکی از مباحث بسیار مهم در آنالیز عددی نیز پیش‌بینی اثرات خطای نمایش اعداد در نتایج عددی است. در قسمتهای بعدی این فصل به برخی از این اثرات اشاره خواهیم کرد.

۱-۳-۱۳ خودآزمایی

۱- بسط اعداد زیر را در مبنای ۲ به‌دست آورید

$$۲۷/۸۷۵ \quad و \quad ۰/۳ \quad و \quad \frac{۱}{۷} \quad و \quad \frac{۱}{۳}$$

۲- بسط اعداد زیر را در مبنای ۵ به‌دست آورید.

$$۰/۵۵ \quad و \quad ۳۷/۲ \quad و \quad \frac{۱}{۳۱} \quad و \quad \frac{۱}{۶} \quad و \quad \frac{۱}{۴}$$

۳- اگر r عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد ثابت کنید:

$$\frac{۱}{r-۱}=(۰/۱)_r \quad و \quad \frac{۱}{r+۱}=(۰/۰S)_r \quad و \quad (S=r-۱)$$

۴- نشان دهید که در مبنای ۱۰

$$\frac{۱}{۹^۲}=۰/۰۱۲۳۴۵۶۷۹$$

۵- با توجه به خصوصیات بسط اعشاری یک عدد گویا، ثابت کنید اعداد زیر گویا نیستند.

۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ...

(بعد از ممیز اعداد طبیعی آمده‌اند).

۰/۱۰۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰۱ ...

(هر بار دو صفر به تعداد صفرهای بین یکها اضافه می‌شود.)

۱-۴ ارقام با معنا

در ریاضیات اعداد زیر با هم مساوی‌اند.

۷/۴۰۰ و ۷/۴۰ و ۷/۴

اما در علومی که بااندازه‌گیری سرو کار دارند، مانند فیزیک، شیمی و...، چنین نیست. اگر گفته شود طولی را اندازه گرفتیم و نتیجهٔ اندازه‌گیری ۷/۴۰ متر بوده است. این گفته بدان معناست که وسیلهٔ اندازه‌گیری دقتی تا حد سانتیمتر داشته و حداکثر خطا ۰/۵ سانتیمتر است. اگر نتیجه اندازه‌گیری ۷/۴۰۰ متر بود معلوم می‌شد که واحد اندازه‌گیری دقتی درحد میلیمتر داشته و

حداکثر خطا ۰/۵ میلیمتر بوده است. از این‌رو، صفرهای جلوی این عدد را، که نشانهٔ دقت اندازه‌گیری هستند، صفرهای بامعنا می‌گویند. اکنون تعریفی نسبتاً دقیق از ارقام بامعنا برای یک عدد ارائه می‌کنیم.

۱ـ۴ـ۱ نمایش علمی اعداد

فرض کنید A عددی مخالف صفر باشد. واضح است که A را همواره می‌توان به‌صورت:

$$A= a \times ۱۰^{b} \qquad (۱۲.۱)$$

نوشت که در آن b عددی صحیح است و

$$۱ \leq |a| < ۱۰$$

در این صورت می‌گوییم A به‌صورت علمی نمایش داده شده است. در این نمایش a را **مانتیس** و b **رانمای** عدد A می‌نامند.

۱ـ۴ـ۲ تعریف

اگر عددی اعشاری باشد و $۱ \leq |a| < ۱۰$ ، در این صورت ارقام بامعنای a عبارت‌اند از ارقام مخالف صفر a ، صفرهای بین این ارقام و صفرهایی که جلوی عدد به‌منظور نمایش دقت قرار دارند. ارقام با معنای عدد مخالف صفر A همان ارقام بامعنای مانتیس A تعریف می‌شود.

۱ـ۴ـ۳ مثال

الف) اگر $A= ۲۱۳/۷۶$ آنگاه $A= ۲/۱۳۷۶ \times ۱۰^{۲}$ و تعداد ارقام با معنای A پنج است

ب) اگر $A= ۰/۰۰۷۲۶$ آنگاه $A= ۷/۲۶ \times ۱۰^{-۳}$ و A دارای ۳ رقم با معناست

پ) اگر متر $l= ۲۰۰۰$ آنگاه متر $l= ۲/۰۰۰ \times ۱۰^{۳}$ و l دارای ۴ رقم با معناست

ت) اگر کیلومتر $d= ۷۸$ آنگاه متر $d= ۷/۸ \times ۱۰^{۴}$ و d دارای دو رقم با معناست.

۱ـ۵ انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم

در بخشهای ۱ـ۲ و ۱ـ۳ نشان داده شد که بسط اکثر اعداد دارای بی‌نهایت رقم است. ضمناً، می‌دانیم که وسایل محاسباتی از نظر نگهداری این ارقام محدودیت دارند. از این رو، باید تعدادی متناهی، که به نوع وسیلهٔ محاسباتی، قدرت آن و دقت لازم بستگی دارد، از ارقام بسط اعشاری یا دو دویی عدد انتخاب کنیم. این کار به دو روش انجام می‌گیرد.

۱ـ۵ـ۱ روش قطع کردن

در این روش، با توجه به تعداد ارقامی که می‌توانیم یا می‌خواهیم نگهداری کنیم، بسط عدد را از

رقم معینی قطع می‌کنیم. این رقم را اولین رقم ناخواسته می‌نامیم. بنابراین، در روش قطع بسط عدد اعشاری، یا دودوئی، عدد از اولین رقم ناخواسته قطع می‌شود. مثلاً، اعداد زیر تا دو رقم اعشار (یا تا ۲ D) قطع شده‌اند.[1]

π = ۳/۱۴ (۲D) و e = ۲/۷۱ (۲D) و $\frac{۵}{۳}$ = ۱/۶۶(۲D)

می‌توان گفت که اعداد سمت راست تساویهای بالا، قطع شدهٔ اعداد سمت چپ تا ۳ رقم بامعنا (۳S) هستند.[2]

۱-۵-۲ روش گرد کردن

در این روش با توجه به مقدار ***اولین رقم ناخواسته***، تقریبی از عدد را به دست می‌آوریم. مثلاً در گرد کردن تا دو رقم اعشار:

۲/۳۴۷۶ = ۲/۳۵ (۲D) و ۳/۷۸۳۰۱=۳/۷۸ (۲D)

یعنی، اگر اولین رقم ناخواسته بزرگتر از ۵ باشد یک واحد به رقم قبل از آن اضافه و عدد را قطع می‌کنیم، و اگر اولین رقم ناخواسته کمتر از ۵ باشد عدد را بدون تغییر قطع می‌کنیم. اما، وقتی اولین رقم ناخواسته ۵ باشد به گونهٔ دیگری عمل می‌کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

۳/۶۸۵۰۰۰۱۰۶ = ۲/۶۹ (۲D)

(توجه کنید که در مثال بالا اولین رقم ناخواسته ۵ است و بعد از آن رقم مخالف صفر وجود دارد)

(رقم قبل از ۵ فرد است) ۱۷/۸۳۵=۱۷/۸۴ (۲D)

(رقم قبل از ۵ زوج است) ۲/۴۶۵=۲/۴۶ (۲D)

علت اصلی در نحوهٔ گرد کردن اعداد در دو حالت اخیر آن است که مقادیری که از اعداد کم یا به آنها اضافه می‌شود در عمل همدیگر را خنثی می‌کنند. به عبارت دیگر، در یک مسئله با محاسبات زیاد، احتمال وقوع اعداد اعشاری با رقم سوم اعشار ۵ و رقم دوم اعشار زوج یا فرد یکسان است، از این‌رو، میانگین خطای گرد کردن متناظر با آنها صفر است.

۱-۵-۳ گرد کردن تا n رقم اعشار

به‌طور کلی اگر ۰ ≠ A دارای بسط اعشاری زیر باشد

$A= a_۱a_۲... a_m/b_۱b_۲... b_nb_{n+۱}...$

و بخواهیم گرد شدهٔ A را تا n رقم اعشار به‌دست آوریم چنین عمل می‌کنیم:

I. اگر $b_{n+۱}>۵$ یک واحد به b_n اضافه و عدد را از $b_{n+۱}$ قطع می‌کنیم

---

۱. D حرف اول واژهٔ Decimal به معنای «اعشاری» است.

۲. S حرف اول واژهٔ Significant به معنای «بامعنا» است.

II. اگر $b_{n+1}<5$ عدد را از b_{n+1} قطع می‌کنیم

III. اگر $b_{n+1}=5$ و بعد از این رقم، رقم مخالف صفر وجود داشته باشد مانند (I) عمل می‌کنیم

IV. اگر $b_{n+1}=5$ و بعد از این رقم، رقم دیگری نباشد، یا فقط صفر باشد، در صورتی که b_n فرد باشد مانند (I) و در غیر این صورت مانند (II) عمل می‌کنیم.

۱-۵-۴ مثال

۱- در زیر گرد شده، چند عدد را ملاحظه می‌کنید

$$\frac{2}{3}=0/667(3D) \quad \text{و} \quad \sqrt{2}=1/414(3D) \quad \text{و} \quad 3/997=4/00(2D)$$

$$\frac{22}{7}=3/14(3S) \quad \text{و} \quad \pi=3/142(4S) \quad \text{و} \quad \sqrt{3}=2(1S) \quad \text{و} \quad 1/99=2/0(2S)$$

۲- اگر a گرد شدهٔ $\frac{2}{3}$ و b قطع شدهٔ $\frac{2}{3}$ تا دو رقم اعشار باشند داریم:

$$a=0/67 \quad \text{و} \quad \left|\frac{2}{3}-a\right|=\frac{1}{300}$$

$$b=0/66 \quad \text{و} \quad \left|\frac{2}{3}-b\right|=\frac{2}{300}$$

یعنی، فاصلهٔ b تا $\frac{2}{3}$ دوبرابر فاصله a تا $\frac{2}{3}$ است. به عبارت دیگر، خطای قطع کردن تا دو برابر خطای گرد کردن است. در عمل بیشتر از گرد کردن استفاده می‌شود (هرچند قطع کردن ساده‌تر است و در اکثر ماشین حسابها از آن استفاده می‌شود).

۱-۵-۵ نتیجه

اگر a گرد شدهٔ A تا n رقم اعشار باشد، باتوجه به نحوهٔ گرد کردن داریم:

$$|A-a|\leq 5\times 10^{-(n+1)} \tag{۱۳.۱}$$

نامساوی بالا نشان می‌دهد که هرچه n بزرگتر باشد a به A نزدیکتر خواهد بود، به همین دلیل است که هروقت دقت زیاد مورد نظر باشد از دقت مضاعف استفاده می‌شود (که در این صورت دو کلمه از حافظه برای ذخیرهٔ یک عدد اعشاری به‌کار می‌رود).

با توجه به آنچه گفته شد برای انتخاب تقریبی یک عدد معلوم، ابتدا بسط اعشاری آن را

به‌دست می‌آوریم و سپس گرد شدهٔ آن را، تا هر تعداد رقم با معنا که می‌توانیم نگهداری یا ذخیره کنیم، معین می‌کنیم. در کامپیوترهای متوسط معمولاً هفت تا هشت رقم با معنا از مانتیس اعداد نگهداری می‌شود (البته در دقت معمولی). اگر دقت مضاعف به‌کار رود تا ۱۷ رقم با معنای بسط اعشاری اعداد قابل ذخیره است.

۱ـ۵ـ۶ خودآزمایی

۱ـ اعداد زیر را به‌صورت علمی بنویسید

۸۷۰۰۰ و $\frac{۲۰۰}{۳}$ و $\sqrt{۲}=۱۰$ و ۰/۰۰۰۲۰۷

۲ـ معین کنید هریک از اعداد زیر چند رقم با معنا دارند

۳/۹۲۰ و ۱۴/۰۲ و ۰/۰۰۱۰ و ۲/۷۱۰

۳ـ هریک از اعداد زیر را تا ۳ رقم اعشار گرد کنید

۲/۳۴۶۵ و ۹/۸۴۵۰۰۱ و ۱/۳۴۷۸

$\frac{e}{۹}$ و $\frac{\pi}{۱۱}$ و ۱/۹۹۹۷ و ۹۸/۰۰۴۵۰۰۱

۴ـ هریک از اعداد زیر را تا چهار رقم بامعنا گرد کنید

۱/۰۰۲۸ و $\frac{\pi}{۱۰}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ و ۰/۰۰۷۸۳۴۲

۱ـ۶ انواع خطا

در آنالیز عددی معمولاً تقریبهایی از یک مجهول در دست است و لازم است دقت این تقریبها و رفتار آنها مورد بررسی قرار گیرد. مثلاً، به دنبالهٔ اعداد زیر توجه کنید

۲ و ۱/۵ و ۱/۳ و ۱/۲۵ و ۱/۲ و ۱/۱۶ و ... و $\frac{n+۱}{n}$ و ...

همان‌طور که می‌دانید حد دنبالهٔ بالا عدد یک است زیرا،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{n}=\frac{n+۱}{n}=۱+\frac{۱}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}۱$$

و بخصوص چون همواره $\frac{n+۱}{n}>۱$، هیچیک از اعداد بالا مساوی حد دنباله نیست. اصولاً در آنالیز عددی همیشه با چنین وضعی روبه‌رو هستیم یعنی، دنباله‌ای‌از اعداد ساخته می‌شود که به جواب مسئلهٔ مورد نظر، طی شرایطی، همگراست. از این‌رو، باید به‌طور کلی خطای موجود در تقریب دلخواهی از یک عدد را تعریف کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم A یک عدد (تحقیقی) و a تقریبی از آن باشد (توجه داشته باشید که معمولاً A جواب واقعی یک مسئله و مجهول است ولی a به یک روش عددی حساب می‌شود).

۱ـ۶ـ۱ تعریف

اگر a تقریبی از A باشد و قرار دهیم

$$e(a)= |A-a|$$

آن گاه e(a) را خطای مطلق a نامند.[1]

۱ـ۶ـ۲ مثال

۱ـ فرض کنید $a_n=\frac{n+1}{n}$. خطای a_n، به عنوان تقریبی از عدد یک چقدر است؟

$$e(a_n)\left|1-\frac{n+1}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

مشاهده می‌شود که هرچه n بزرگتر اختیار شود $\frac{1}{n}$ کوچکتر خواهد بود و در نتیجه a_n به یک نزدیکتر خواهد شد. اگر بخواهیم خطای a_n از، مثلاً، ۰/۰۰۱ کوچکتر باشد کافی است قرار دهیم:

$$\frac{1}{n}<0/001$$

که از آن نتیجه می‌شود $n>1000$. اولین n که در نامساوی اخیر صدق می‌کند ۱۰۰۱ است که به ازای آن

$$a_n=\frac{1002}{1001}=1/000999 \quad (6\ D)$$

اما، همیشه وضع به گونه‌ای نیست که عدد A را داشته باشیم. معمولاً، A مجهول است و یاحتی در حالت معلوم بودن e(a) به راحتی قابل بیان نیست.

۲ـ می‌دانیم که ۱/۴۱ تقریبی از $\sqrt{2}$ است. خطای مطلق ۱/۴۱ چیست؟

$$e(1/41)=\left|\sqrt{2}-1/41\right|=\sqrt{2}-1/41$$

اگر بسط اعشاری $\sqrt{2}$ را، با استفاده از یک ماشین حساب، بنویسیم یعنی:

$$\sqrt{2}=1/414213562 \quad (9D)$$

خواهیم داشت

$$e(1/41)=0/00421356 2\ ... \qquad (14.1)$$

مشاهده می‌شود که e (۱/۴۱) به سادگی قابل بیان نیست و همان $\sqrt{2}-1/41$ بیان ساده‌تر و دقیقتری از آن است.

حال فرض کنید که حدود $\sqrt{2}$ را بدانیم، مثلاً، بدانیم که

$$1/414<\sqrt{2}<1/415$$

---

۱. e حرف اول واژهٔ error به معنای «خطا» است.

در این صورت:

$$۰/۰۰۴ < \sqrt{۲} - ۱/۴۱ < ۰/۰۰۵$$

بنابراین،

$$e\,(۱/۴۱) < ۰/۰۰۵$$

بدیهی است که ۰/۰۰۵ یک کران بالا برای خطای ۱/۴۱ است و تا حد زیادی مقدار نزدیکی (یا دقت) ۱/۴۱ را به $\sqrt{۲}$ نشان می‌دهد.

در اکثر روشهای آنالیز عددی حدود جواب، یعنی کران بالا و پایینی برای جواب، قابل محاسبه است که از آنجا کران بالایی، طبق توضیحات بالا، برای $e(a)$ به‌دست می‌آید.

با توجه به این مطالب تعریف زیر را داریم.

۱-۶-۳ تعریف

هر عدد ناکمتر از $e(a)$ را یک خطای مطلق حدی a نامیم و با e_a نمایش می‌دهیم. بنابراین، همواره $e(a) \leq e_a$ و e_a منحصر به‌فرد نیست (برخلاف $e(a)$).

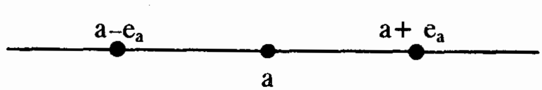
اکنون فرض کنید یک خطای مطلق حدی چون e_a به طریقی به‌دست آمده باشد. یعنی،

$$e(a) = |A - a| \leq e_a$$

با استفاده از نامساوی اخیر و خواص قدرمطلق داریم:

$$a - e_a \leq A \leq a + e_a \qquad (۱۵.۱)$$

این نامساویها نشان می‌دهند که A در بازهٔ $[a-e_a$ و $a + e_a]$ قرار دارد.



A متعلق به بازهٔ بالاست

طول این بازه $۲e_a$ است و هرچه e_a کوچکتر باشد حدود دقیقتری برای A حاصل می‌شود.

۱-۶-۴ قرارداد

هر وقت $|A - a| \leq e_a$ می‌نویسیم:

$$A = a \pm e_a$$

۱ـ۶ـ۵ مثال

۱ـ اگر $l = ۲/۷ \pm ۰/۰۴$ حدود l را تعیین کنید

بنابر (۱.۱۵)،

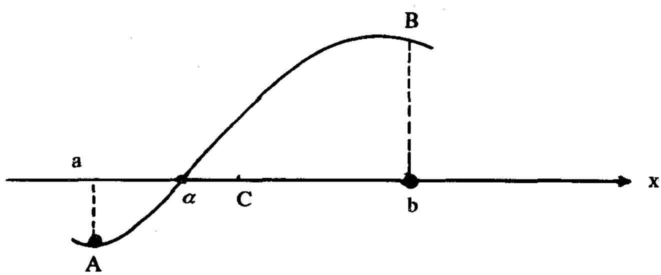
$$۲/۷ - ۰/۰۴ \le l \le ۲/۷ + ۰/۰۴$$

پس

$$۲/۶۶ \le l \le ۲/۷۴$$

در روشهای‌عددی عمدتاً A مجهول است و یک خطای مطلق حدی برای تقریب a از A قابل محاسبه است. در این مورد، به مثال زیر توجه کنید (در فصل دوم موارد بیشتری ارائه خواهد شد).

۲ـ فرض کنید منحنی تابع $y= f(x)$ در بازهٔ (a , b) محور x ها را قطع می‌کند (شکل ۱ـ۴). تقریبی‌ازطول‌نقطهٔ‌برخوردمنحنی با محور x را تعیین کنید و حداکثر خطای آن را به‌دست آورید.



شکل ۱ـ۴

محل تلاقی منحنی با محور x، α است و c را وسط بازهٔ (a,b) می‌گیریم، در واقع $c=\frac{a+b}{۲}$. واضح است که c تقریبی از α است و به‌وضوح فاصلهٔ α تا c کمتر از نصف طول بازهٔ (a,b) است. یعنی،

$$|\alpha - c| \le \frac{b - a}{۲}$$

مشاهده می‌شود که عدد $\frac{b-a}{۲}$ یک کران بالا برای خطای c است که به محل α بستگی ندارد و به سادگی قابل محاسبه است.

حال این سؤال مطرح است که

«آیا خطای مطلق یک تقریب، دقت آن تقریب راکاملاً مشخص می‌کند؟» مطالب زیر رامطالعه و به سؤالات مربوط پاسخ دهید تاجواب سؤال بالا مشخص شود.

الف) دو صندوقدار بانک را در نظر بگیرید که یکی با رد و بدل کردن، مثلاً، یک میلیون

تومان، صد تومان کم ، و دیگری با رد و بدل کردن پانصد هزار تومان، صد تومان زیاد آورده است! دقت کدام صندوقدار بیشتر بوده است؟

ب) دو ماشین‌نویس را در نظر بگیرید که یکی در تایپ دو صفحه ده کلمه و دیگری در تایپ ۲۰ صفحه ده کلمه غلط تایپ کرده است. دقت کدام ماشین‌نویس بیشتر بوده است؟

ج) دو دروازه‌بان را در نظر بگیرید که یکی از ۵ پنالتی ۴ گل و دیگری از ۱۰ پنالتی ۴ گل خورده است. کدام دروازه‌بان بهتر بوده است (دقیقتر عمل کرده است)؟

از مثالهای فوق چنین برمی‌آید که آنچه دقت یک تقریب را معین می‌کند خطا در واحد کمیت است که هرچه کوچکتر باشد تقریب بهتر (دقیقتر) است.

۱-۶-۶ تعریف

اگر a تقریبی از عدد مخالف صفر A باشد خطای نسبی a را با $\delta(a)$ نشان می‌دهیم و آن عبارت است از خطا در واحد کمیت، یعنی،

$$\delta(a)=\frac{|A-a|}{|A|}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، A، که معمولاً مقدار آن معلوم نیست، هم در صورت و هم در مخرج کسر موجود است؛ می‌توان یک کران بالا برای $\delta(a)$ به دست آورد که A در آن نباشد.

۱-۶-۷ قضیه

اگر a تقریبی از A و e_a یک خطای مطلق حدی a باشد داریم

$$\delta(a)\leq\frac{e_a}{|a|-e_a}$$

برهان

بنا به‌فرض، داریم

$$|A-a|\leq e_a$$

و بنابرخواص قدر مطلق،

$$|a|-|A|\leq|A-a|$$

$$|A|\geq|a|-e_a$$

در نتیجه،

کسر اخیر را با δ_a نشان می‌دهیم و آن را خطای نسبی حدی می‌نامیم.

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد می‌توان از آن صرفنظر کرد و نوشت:

$$|a| - e_a \simeq |a|$$

و نتیجه زیر را به‌دست آورد.

۱-۶-۹ نتیجه

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد

$$\delta(a) \lesssim \frac{e_a}{|a|}$$

(نماد $\lesssim$ به معنی «تقریباً کوچکتر از» است)

با توجه به اینکه در عمل a محاسبه و e_a برآورد می‌شود کسر $\frac{e_a}{|a|}$ همیشه قابل محاسبه است و به همین دلیل بعضی کتابها $\frac{e_a}{|a|}$ را تقریباً مساوی $\delta(a)$ می‌گیرند. ما نیز از این به بعد چنین می‌کنیم. یعنی، فرض می‌کنیم e_a در مقایسه با $|a|$ قابل اغماض باشد و قرار می‌دهیم

$$\delta(a) \simeq \frac{e_a}{|a|} \tag{۱۶.۱}$$

۱-۶-۹ مثال

فرض کنید $a=۱/۴۱$ و $A=\sqrt{۲}$. خطای نسبی a را حساب کنید.

$$\delta(a) = \frac{\sqrt{۲}-۱/۴۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۰/۰۰۴۲۱۳۵۶۲}{۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲} = ۰/۰۰۲۹۷۹۴۳۸...$$

اما اگر، باتوجه به مثال ۱-۶-۳، قرار دهیم $e_a = ۰/۰۰۵$ خواهیم داشت

$$\delta(a) \simeq \frac{e_a}{a} = \frac{۰/۰۰۵}{۱/۴۱} = ۰/۰۰۳۵۴۶۰۹۹۲۹۱...$$

که تفاوت چندانی با $\delta(a)$ ندارد (اختلاف حدود ۰/۰۰۰۶ است. اگر قرار می‌دادیم $e_a = ۰/۰۰۴۳$ مقدار $\frac{e_a}{a}$ چقدر با $\delta(a)$ اختلاف داشت؟

۱-۶-۱۰ خودآزمایی

می‌دانیم که ... $e = ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸$. ابتدا a_k را، به‌ازای ۵، ۴، ۳، ۲ $=k$، گرد شدهٔ e تا k رقم بامعنا بگیرید سپس درستی نامساویهای زیر را تحقیق کنید.

$$|e - a_k| \le ۵ \times ۱۰^{-k}$$

و

$$\delta(a_k) < ۵ \times ۱۰^{-k}$$

۱ـ۷ ارقام بامعنای درست یک تقریب

هریک از اعداد زیر یک تقریب از عدد e هستند

۲/۷۱۸۱ و ۲/۷۱۸ و ۲/۷۲ و ۲/۷ و ۳

یکی از راههای تعیین دقت این تقریبها آن است که خطای نسبی آنها را حساب کنیم. اکنون این سؤال مطرح است که آیا راه دیگری برای تعیین دقت این اعداد وجود دارد؟ مثلاً، با استفاده از تعداد ارقام آن یا خصوصیات دیگر؟ بدیهی است که تعداد ارقام بامعنای یک تقریب مؤید دقت آن تقریب نیست. مثلاً، عدد ۳/۷۱۸۲۳۸ تقریبی از عدد e است که ۷ رقم بامعنا دارد. آیا این عدد تقریب خوبی از e است؟ آیا ۳ تقریب بهتری نیست؟ پس چگونه می‌توان باتوجه به ارقام یک تقریب به دقت آن پی برد؟ اینجاست که پای مفهوم ارقام با معنای درست به میان می‌آید. این مفهوم ازگرد کردن یک عدد ناشی شده است. قبل از ارائهٔ تعریف دقیق ارقام با معنای درست هر تقریب، مثالی می‌آوریم.

۱ـ۷ـ۱ مثال

فرض کنید $A=$ ۸/۰۰۰ و $a=$ ۷/۹۹۷ و $a'=$ ۸/۰۸. مشاهده می‌شود که a' درست دو رقم، مساوی با ارقام A دارد (با حفظ ارزش هر رقم). اما، هیچیک از ارقام a مساوی ارقام A نیست. آیا می‌توان گفت که ارقام درست a' بیشتر از ارقام درست a است؟ خواهیم دید که نه.

مفهوم ارقام با معنای درست هر تقریب رابطهٔ تنگاتنگ با دقت آن تقریب دارد. در اینجا

$e(a)=$ ۰/۰۰۳ و $e(a')=$ ۰/۰۸

و در واقع a باید تعداد ارقام درست بیشتری داشته باشد! اما، تعداد ارقام با معنای درست چگونه به‌دست می‌آید؟ به بیان نادقیق به صورت زیر

اگر a را تا سه رقم با معنا گرد کنید عدد A حاصل می‌شود. از این‌رو، a سه رقم با معنای درست دارد. اگر a' راتا رقم یکان گرد کنید A حاصل می‌شود (توجه کنید که حتی گرد شدهٔ a' تا یک رقم اعشار، به ۸/۱ منجر می‌شود که مساوی A نیست). یعنی، a' تنها یک رقم با معنای درست دارد (هرچند که دو رقم آن دقیقاً در بسط A ملاحظه می‌شود).

۱ـ۷ـ۲ تعریف

فرض کنید

$$a=a_m\times ۱۰^m+a_{m-۱}\times ۱۰^{m-۱}+\dots \qquad (a_m\neq ۰)$$

بسط اعشاری a و d تعداد ارقام با معنای a باشد. در این صورت بزرگترین عدد صحیح نامنفی n که $n\leq d$ و

$$|A - a| \leq ۵ \times ۱۰^{m-n}$$

تعداد ارقام با معنای درست a نامیده می‌شود.

برای روشن شدن ۱ـ۷ـ۲ نحوهٔ به دست آوردن m و بررسی نامساوی مندرج در این تعریف را طی چند مثال شرح و در نهایت ارتباط بین ارقام با معنای درست یک تقریب و خطای نسبی آن را توضیح می‌دهیم.

۱ـ۷ـ۳ مثال

الف) اگر $a= ۳/۱۴$ آن‌گاه

$$a= ۳ \times ۱۰^{۰} + ۱ \times ۱۰^{-۱} + ۴ \times ۱۰^{-۲}, m= ۰$$

ب) اگر $a= ۰/۰۰۷۸$ آن‌گاه

$$a = ۷ \times ۱۰^{-۳} + ۸ \times ۱۰^{-۴}, m= -۳$$

پ) اگر $\alpha= ۱۲۳/۷$ آن‌گاه

$$a= ۱ \times ۱۰^{۲} + ۲ \times ۱۰^{۱} + ۳ \times ۱۰^{۰} + ۷ \times ۱۰^{-۱}, m= ۲$$

ت) اگر $a= \frac{۱}{۳}$ آن‌گاه $a= ۰/۰\dot{۳}$ که در نتیجه، $m=-۲$.

به‌طور کلی اگر

$$a= a_m \times ۱۰^{m} + a_{m-۱} \times ۱۰^{m-۱} + \ldots > ۰ \quad (a_m \neq ۰)$$

$$۱۰^{m} \leq a < ۱۰^{m+۱}$$

و در نتیجه، $m \leq \log_{۱۰} a < m+۱$ که با توجه به تعریف جزء صحیح معلوم می‌شود که $m= [\log_{۱۰} a]$. به‌عبارت دیگر m مساوی مفسر لگاریتم a در مبنای ده است.

از این‌رو، اگر $a \geq ۱$ آن‌گاه

$$m= ([a] \text{ تعداد ارقام}) - ۱$$

و اگر $۰ < a < ۱$ آن‌گاه

$m= -$ [(تعداد صفرهای بلافاصله بعد از ممیز در بسط a) +۱] (یا m قرینهٔ تعداد صفرهای قبل و بلافاصله بعد از ممیز در بسط اعشاری a است). به این ترتیب بدون نوشتن بسط اعداد نیز می‌توان مقدار m مربوط به آنها را به‌دست آورد. کافی است معین کنیم a کوچکتر از یک است یا بزرگتر یا مساوی ۱ و طبق آنچه در بالا گفته شد عمل کنیم.

۱ـ۷ـ۴ مثال

۱ـ در بسط اعشاری $e^{\frac{۱}{۳}}$ مقدار m را حساب کنید.

با توجه به اینکه $۰ < \frac{۱}{۳} < ۱$ داریم $e^{۰} < e^{\frac{۱}{۳}} < e^{۱}$

پس، $1<e^{\frac{1}{3}}<e<3$

از این‌رو، قسمت صحیح $e^{\frac{1}{3}}$ یک رقمی است (یا یک است یا دو). بنابراین $m=0$.

۲ـ اگر $A=8/00$، $a=7/997$، $a'=8/08$ تعداد ارقام با معنای درست a و a' را حساب کنید.

با توجه به اینکه جزء صحیح a و a' اعداد یک رقمی هستند، m برای هر دو صفر است. و داریم:

$$e(a)=0/003$$

حال باید بزرگترین n را به‌دست آوریم که در نامساوی زیر صدق کند

$$0/003 \leq 5\times 10^{0-n}$$

بدیهی است که بزرگترین n برابر ۳ است. یعنی، a دارای ۳ رقم با معنای درست است.

برای a' نیز داریم

$$e(a')=0/08 < 0/5=5\times 10^{0-1}$$

یعنی a' تنها یک رقم با معنای درست دارد.

۳ـ اگر $A=100$، $a=99/98$، $b=100/6$ تعداد ارقام با معنای درست a و b را حساب کنید.

در مورد a داریم $m=1$ و

$$e(a)=0/02$$

حال باید بزرگترین n را چنان تعیین کنیم که

$$0/02 < 5\times 10^{1-n}$$

بدیهی است که $n=3$ جواب است. یعنی، a دارای سه رقم با معنای درست است.

در مورد b داریم $m=2$ و باید $e(b)=0/6 < 5\times 10^{2-n}$ که $n=2$ جواب است، یعنی، b تنها دو رقم بامعنای درست دارد.

در زیر طی چند قضیه و مثال ارتباط بین ارقام با معنای درست یک تقریب و دقت آن را، که با خطای نسبی محک زده می‌شود، بررسی می‌کنیم.

۱ـ۷ـ۵ قضیه

اگر a تقریبی از A با n رقم با معنای درست باشد و $b=10^k\times a$ و $B=10^k\times A$، که در آن k عددی صحیح است، آنگاه b نیز تقریبی از B با n رقم با معنای درست است و خطای نسبی a و b یکسان هستند.

برهان

فرض کنید

$$a = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots \quad (a_m \neq 0)$$

در این صورت

$$b = a_m \times 10^{m+k} + \dots$$

بنابراین، m مربوط به b برابر m + k است. چون a، n رقم با معنای درست دارد n بزرگترین عدد صحیحی است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$|A - a| \leq 5 \times 10^{m-n}$$

بنابراین،

$$|B - b| = 10^k\,|A - a| \leq 5 \times 10^{(m+k)-n}$$

و n بزرگترین عدد صحیحی است که در این نامساوی صدق می‌کند. از این‌رو، b نیز n رقم با معنای درست دارد. قسمت دوم قضیه راحت است و اثبات آن به دانشجو واگذار می‌شود.

۱ـ۷ـ۶ قضیه

اگر a گرد شدهٔ عدد مثبت A تا n رقم با معنا باشد a دارای n رقم با معنای درست است.

برهان

با توجه به قضیهٔ ۱ـ۷ـ۵ می‌توان فرض کرد که

$$a = 0/c_1 c_2 \dots c_n$$

که در آن $c_1 \neq 0$ (اگر a چنین نباشد باانتخاب عدد صحیح و مناسب k می‌توان $10^k \times a$ را به این شکل درآورد). بنابراین، در مورد این a داریم $m = -1$. از طرف دیگر با استفادهٔ از (۱.۱۳) داریم

$$|A - a| \leq 5 \times 10^{-(n+1)} = 5 \times 10^{-1-n}$$

که نتیجه می‌دهد a، n رقم با معنای درست دارد. (توجه کنید ممکن است داشته باشیم $|A - a| \leq 5 \times 10^{-1-n'}$ و $n' > n$. اما چون a بیش از n رقم بامعنا ندارد کمترین n و n' همان n می‌شود).

۱ـ۷ـ۷ قضیه

اگر $a > 0$ تقریبی‌از A و دارای n رقم با معنای درست‌باشد خطای نسبی a از 5×10^{-n} کمتر است، به شرط آن‌که رقمهای درست a شامل یک رقم یک و $n-1$ صفر در سمت‌راست آن نباشد.

برهان

با توجه به قضیهٔ ۱ـ۷ـ۵ می‌توان فرض کرد که

$$a = b_۱b_۲ \dots b_n/c_۱c_۲ \dots$$

که در آن $b_۱b_۲ \dots b_n$ عدد حاصل از n رقم با معنای درست a است. بنابراین، m مربوط به این a برابر ۱-n است و با توجه به تعریف تعداد ارقام بامعنای درست هر تقریب، داریم

(۱۷.۱)
$$|A - a| \le ۵/\times ۱۰^{(n-۱)-n} = ۰/۵$$

از نامساوی اخیر معلوم می‌شود که، با توجه به اینکه $|A - a| \le |A| - |a|$ ،

$$|A| \le |a| - ۰/۵ = a - ۰/۵$$

اما، بنابر فرض قضیه

$$b_۱b_۲ \dots b_n \ne ۱۰^{n-۱}$$

پس،

$$a \ge b_۱b_۲ \dots b_n \ge ۱۰^{n-۱} + ۱$$

بنابراین،

(۱۸.۱)
$$|A| \ge a - ۰/۵ \ge ۱۰^{n-۱} + ۱ - ۰/۵ = ۱۰^{n-۱} + ۰/۵ > ۱۰^{n-۱}$$

پس، باتوجه به (۱۷.۱) و (۱۸.۱)

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} < \frac{۰/۵}{۱۰^{n-۱}} = ۵ \times ۱۰^{-n}$$

استثنای موجود در قضیهٔ ۱ـ۷ـ۷ به ندرت اتفاق می‌افتد. از این‌رو در عمل به آن توجه نمی‌شود و حکم قضیه برای هر a به کار می‌رود. ما نیز چنین خواهیم کرد. (ر.ک. [۷])

۱ـ۷ـ۸ مثال

تقریبی از π ارائه دهید که خطای نسبی آن از $۱۰^{-۳}$ کمتر باشد.

یکی از راههای تعیین این تقریب آن است که عدد π را تا یک رقم، دو رقم، ... اعشارگرد و خطای نسبی هریک را محاسبه کنیم، تا زمانی که از $۱۰^{-۳}$ کمتر شود! به عبارت دیگر، مقدار کسرهای زیر را حساب کنیم تا به عددی کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ برسیم.

$$\frac{\pi - ۳/۱}{\pi} \quad \text{و} \quad \frac{\pi - ۳/۱۴}{\pi} \quad \text{و} \quad \frac{\pi - ۳/۱۴۲}{\pi} \quad \text{و} \quad \dots$$

اما، با استفاده از قضیهٔ ۱ـ۷ـ۷ به راحتی می‌توان جواب را به‌دست آورد. با توجه به نامساوی

$$۵ \times ۱۰^{-۴} < ۱۰^{-۳}$$

اگر a چنان تقریبی از π باشد که ۴ رقم با معنای درست داشته باشد بنابر قضیهٔ ۱ـ۷ـ۷

$$\delta(a) < ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

و بنابراین $\delta(a) < ۱۰^{-۳}$. از این‌رو، با توجه به قضیهٔ ۱ـ۷ـ۶ کافی است a را گرد شدهٔ π تا ۴ رقم با معنا اختیار کنیم. یعنی، $a = ۳/۱۴۲$ تقریب مورد نظر است.

اکنون به اثبات قضیه‌ای که تقریباً عکس قضیهٔ ۱ـ۷ـ۹ است می‌پردازیم.

۱ـ۷ـ۹ قضیه

اگر $a > ۰$ تقریبی از A باشد به‌طوری که $\delta(a) \le ۰/۵ \times ۱۰^{-n}$ آنگاه a حداقل n رقم با معنای درست دارد.

برهان

با فرض

$$a = a_m \times ۱۰^m + a_{m-۱} \times ۱۰^{m-۱} + \dots$$

داریم (با توجه به اینکه $a_i \le ۹$):

$$a = ۱۰^m\left(a_m + \frac{a_{m-۱}}{۱۰} + \frac{a_{m-۲}}{۱۰۰} + \dots\right) < ۱۰^m\left(۹ + ۰/۹ + ۰/۰۹ + \dots\right) = ۱۰^{m+۱}$$

همچنین داریم $\delta(a) \simeq \frac{e(a)}{a}$ که در نتیجه، با توجه به فرض قضیه:

$$e(a) \simeq a \times \delta(a) \le ۱۰^{m+۱} \times ۰/۵ \times ۱۰^{-n} = ۵ \times ۱۰^{m-n}$$

چون ممکن است n ی بزرگتر در نامساوی بالا صدق کند، نتیجه می‌گیریم که a حداقل n رقم با معنای درست دارد.

با توجه به این‌که خطای نسبی یک تقریب دقت آن تقریب را نشان می‌دهد قضایای ۱ـ۷ـ۷ و ۱ـ۷ـ۹ به‌خوبی ارتباط بین دقت یک تقریب را با تعداد ارقام با معنای درست آن نشان می‌دهند. در بعضی مسائل خطای نسبی تقریب را می‌توان به‌دست آورد (مثلاً، در حل دستگاه معادلات خطی به روشهای عددی) که در نتیجه با استفاده از قضیهٔ ۱ـ۷ـ۹ می‌توان حداقل تعداد ارقام با معنای درست تقریب به دست آمده را تعیین کرد. در برخی دیگر از مسائل می‌توان تعداد ارقام بامعنای درست یک تقریب را به‌دست آورد، مثلاً، در روش نیوتن برای تعیین تقریبی از یک ریشهٔ معادلهٔ $F(x) = ۰$ که با توجه به قضیهٔ ۱ـ۷ـ۷ می‌توان خطای نسبی و در نتیجه دقت آن تقریب را معین کرد.

۱ـ۷ـ۱۰ خودآزمایی

۱ـ می‌دانیم که $\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۴\dots$ فرض کنید a_k، به ازای $k = ۲, ۳, ۴, ۵$، گرد شدهٔ π تا k رقم بامعنا باشد، با استفاده از تعریف ۱ـ۷ـ۲ نشان دهید که a_k دارای k رقم با معنای درست است.

۲ـ تقریبی از $\sqrt{۳}$ و تقریبی از $\sqrt{۷}$ ارائه دهید که خطای نسبی آنها از $۱۰^{-۴}$ کمتر باشد.

۳ـ اگر $a = a_m \times ۱۰^m + \dots > ۰$ تقریبی از A و دارای n رقم با معنای درست باشد ثابت کنید

$$\delta(a) \leq \frac{۵ \times ۱۰^{-n}}{a_m}$$

(فرض کنید $\delta(a) \simeq \frac{e(a)}{a}$)

۴ـ با استفاده از تمرین ۳، تقریبی از $\sqrt{۱۹}$ به‌دست آورید که خطای نسبی آن از $۱۰^{-۴}$ کمتر باشد (خطای نسبی تقریبی را که ارائه می‌کنید حساب کنید).

۱ـ۸ تولید و انتشار خطا

همان‌طور که می‌دانید صورت علمی نمایش هر عدد اعشاری مخالف صفر

$$a \times ۱۰^b$$

است که در آن، $۱ \leq |a| < ۱۰$

این نمایش را نمایش **ممیز سیّار** نیز می‌نامند (با تغییر نما، ممیز در بین ارقام a تغییر محل می‌دهد). محاسبه با این اعداد را نیز حساب ممیز سیّار می‌نامند. قبل از این‌که نحوهٔ تولید و انتشار خطا را توضیح دهیم لازم است در مورد چگونگی انجام چهار عمل اصلی روی اعداد ممیز سیار مطالبی بیان کنیم. برای سادگی بحث فرض کنید فقط سه رقم با معنا از ارقام مانتیس هر عدد اعشاری، یعنی a، رامی‌توانیم نگه داریم؛ این را حساب ممیز سیار سه‌رقمی نامند.

۱ـ۸ـ۱ حساب ممیز سیار

در اینجا اعمال اصلی بر اعداد ممیز سیار را بررسی می‌کنیم.

الف) جمع و تفریق

برای به‌دست آوردن حاصل جمع یا تفاضل دو عدد ابتدا نماها یکسان می‌شوند، در صورت لزوم *با افزایش نمای عدد کوچکتر*، سپس حاصل عمل به‌دست می‌آید و سرانجام جواب حاصل به‌صورت علمی، بامانتیسی که ۳ رقم بامعنا دارد، نوشته می‌شود.

مثلاً

$$۳/۱۲ \times ۱۰^{۱} + ۸/۳۴ \times ۱۰^{۱} = ۱۱/۴۶ \times ۱۰^{۱} = ۱/۱۴۶ \times ۱۰^{۲} \to ۱/۱۵ \times ۱۰^{۲}$$

$$۶/۴۸ \times ۱۰^{۱} + ۱/۴۵ \times ۱۰^{-۱} = ۶/۴۸ \times ۱۰^{۱} + ۰/۰۱۴۵ \times ۱۰^{۱} = ۶/۴۹۴۵ \times ۱۰^{۱} \to ۶/۴۹ \times ۱۰^{۱}$$

$$۳/۵۶ \times ۱۰^{-۱} - ۲/۶۷ \times ۱۰^{-۱} = ۰/۸۹ \times ۱۰^{-۱} \to ۸/۹ \times ۱۰^{-۲}$$

$$۱/۴۹ \times ۱۰^{+۱} - ۱/۲ \times ۱۰^{-۱} = ۱/۴۹ \times ۱۰^{۱} - ۰/۰۱۲ \times ۱۰^{۱} = ۱/۴۷۸ \times ۱۰^{۱} \to ۱/۴۸ \times ۱۰^{۱}$$

ب) ضرب

در ضرب دو عدد ممیز سیار، نماها با هم جمع و مانتیسها در هم ضرب می‌شوند. سپس نتیجه

نهایی، با گرد کردن، به صورت علمی نمایش داده می‌شود. مثلاً،

$$(3{,}25\times 10^{1})\times(2{,}46\times 10^{1})=7{,}995\times 10^{2}\to 8{,}00\times 10^{2}$$

$$(7{,}48\times 10^{3})\times(3{,}37\times 10^{-2})=25{,}2076\times 10^{1}=2{,}52076\times 10^{2}\to 2{,}52\times 10^{2}$$

ج) تقسیم

برای تقسیم دو عدد ممیز سیار، ابتدا تفاضل نماها به‌دست می‌آید، سپس مانتیسها برهم تقسیم شده و حاصل به صورت علمی نمایش داده می‌شود. مثلاً،

$$\frac{5{,}43\times 10^{1}}{4{,}55\times 10^{2}}=1{,}1934\ldots\times 10^{-1}\to 1{,}19\times 10^{-1}$$

$$\frac{2{,}75\times 10^{1}}{9{,}87\times 10^{3}}=0{,}278622\ldots\times 10^{-2}=2{,}78622\ldots\times 10^{-3}\to 2{,}79\times 10^{-3}$$

مشاهده می‌شود که حتی اگر عوامل یک عمل دقیق باشند، نتیجه، معمولاً، گرد شدهٔ حاصل دقیق است، خطایی که به‌این ترتیب وارد می‌شود **خطای تولید شده** نام دارد.

د) محاسبهٔ عبارات

ممکن است در یک عبارت محاسباتی چهار عمل اصلی شرکت داشته باشند. در این‌صورت، عملیات همانند آنچه توضیح داده شد انجام می‌شود تاحاصل نهایی به‌دست آید. مثلاً

$$\frac{6{,}18\times 10^{1}+1{,}84\times 10^{-1}}{[4{,}72\times 10^{1}]\,[6{,}38\times 10^{1}]}\to\frac{6{,}20\times 10^{1}}{3{,}01\times 10^{3}}=2{,}0598\ldots\times 10^{-2}\to 2{,}06\times 10^{-2}$$

در مثال بالا، مقادیر صورت و مخرج کسر دوم شامل خطاهای تولید شده هستند. این اعداد تقریبی نیز برهم تقسیم می‌شوند و نتیجهٔ نهایی بازهم شامل خطای تولید شدهٔ دیگری است. بدیهی است که خطاهای تولید شده در صورت و مخرج کسر دوم انتشار پیدا می‌کنند و روی مقدارجواب نهایی اثر می‌گذارند.

۱ـ۸ـ۲ تفاوتهای حساب ممیز سیار با حساب معمولی

در حساب ممیز سیّار، با هر تعداد رقم که بتوان نگهداشت، قوانین حساب معمولی، نظیر وجود عضو بی‌اثر برای جمع، شرکتپذیری ضرب یا جمع و... عموماً برقرار نیستند. این موارد در مثالهای زیر بررسی می‌شود.

الف) در حساب ممیز سیار، مثلاً، سه‌رقمی، هرعدد کوچکتر از 5×10^{-3} را که با عدد ۲/۷۵ جمع کنیم حاصل ۲/۷۵ خواهد بود، به‌عنوان مثال،

$$2/75 + 4 \times 10^{-3} = 2/75 \times 10^{0} + 0/004 \times 10^{0} = 2/754 \times 10^{0} \to 2/75$$

بنابراین، در جمع اعداد ممیز سیار عضو بی‌اثر منحصر به‌فرد نیست.

ب) شرکتپذیری عمل جمع در اعداد ممیز سیار برقرار نیست. مثلاً، در محاسبهٔ

$$2/75 + 4 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3}$$

داریم:

$$2/75 + 4 \times 10^{-3} = 2/754 \to 2/75$$

$$2/75 + 3 \times 10^{-3} = 2/753 \to 2/75$$

بنابراین:

$$(2/75 + 4 \times 10^{-3}) + 3 \times 10^{-3} \to 2/750$$

اما،

$$4 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3} = 7 \times 10^{-3}$$

و

$$2/75 + 7 \times 10^{-3} = 2/757 \to 2/76$$

یعنی، در حساب ممیز سیار سه‌رقمی، حاصل عبارات

$$2/75 + (4 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3}) \quad و \quad (2/75 + 4 \times 10^{-3}) + 3 \times 10^{-3}$$

یکسان نیست.

ثابت می‌شود که در حساب ممیز سیار بهتر است اعداد از کوچک به بزرگ با هم جمع شوند [۱۴]. (مثال بالا مؤید این مطلب است).

۱-۸-۳ انتشار خطا

در حالت کلی اگر A و B دو عدد و a و b به ترتیب، تقریبهایی از آنها باشند و $\otimes$ نماد یک عمل باشد، در وسایل محاسباتی این عمل با نماد $\otimes^*$ تقریب می‌شود و در واقع آنچه این وسایل به ما می‌دهند $a \otimes^* b$ است و داریم:

$$|A \otimes B - a \otimes^* b| = |(A \otimes B - a \otimes b) + (a \otimes b - a \otimes^* b)|$$

$$\leq \underbrace{|(A \otimes B - a \otimes b)|}_{\text{خطای منتشر شده}} + \underbrace{|a \otimes b - a \otimes^* b|}_{\text{خطای تولید شده}}$$

بنابراین، خطای کل از مجموع خطای منتشر شده و خطای تولید شده بیشتر نیست.

در آنچه خواهد آمد حداکثر خطای منتشر شده را برای چهارعمل اصلی به‌جای $\otimes$

محاسبه می‌کنیم. معمولاً در عمل به خطای تولید شده توجه زیادی نمی‌شود هرچند گاهی اوقات باعث به دست آمدن جوابهای غیرقابل قبول می‌شود.

در ادامه جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد تقریبی را بررسی می‌کنیم.

الف) جمع اعداد تقریبی

در حساب ممیز سیار ۳ رقمی داریم

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\simeq ۱/۴۱+۱/۷۳=۳/۱۴$$

مشاهده می‌شود که تقریبی‌از $\sqrt{۲}$ با تقریبی از $\sqrt{۳}$ جمع شده است. اکنون می‌خواهیم معین کنیم که خطای ۳/۱۴ حداکثر چقدر است و چه ارتباطی باخطاهای ۱/۴۱ و ۱/۷۳ دارد.

درحالت کلی داریم

۱-۸-۴ قضیه

اگر a و b تقریبهایی از A و B و این اعداد جملگی مثبت باشند آنگاه

$$e(a+b)<e(a)+e(b)$$
$$\delta(a+b)\le\max\{\delta(a),\delta(b)\}$$

برهان

بنابر تعریف، خطای مطلق یک تقریب، چون $a+b$ به عنوان تقریبی از $A+B$ پذیرفته می‌شود داریم:

$$e(a+b)=|(A+B)-(a+b)|\le|A-a|+|B-b|=e(a)+e(b)$$

برای اثبات قسمت دوم حکم، قرار می‌دهیم

$$D=\max\{\delta(a),\delta(b)\}$$

بنابر قسمت اول قضیه و تعریف خطای نسبی:

$$\delta(a+b)\simeq\frac{e(a+b)}{a+b}\le\frac{e(a)+e(b)}{a+b}=\frac{e(a)}{a+b}+\frac{e(b)}{a+b}$$
$$=\frac{e(a)}{a}\times\frac{a}{a+b}+\frac{e(b)}{b}\times\frac{b}{a+b}<D\left[\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right]=D$$

۱-۸-۵ نتیجه

حداکثر خطای $a+b$ مجموع خطاهای a و b است و دقت $a+b$ می‌تواند همانند نادقیقترین a

و b باشد. از این‌رو، در اندازه‌گیری کمیتهایی که می‌خواهیم جمع کنیم، بهتر است آنها را با یک واحد اندازه‌گیری کنیم.

ب) تفریق اعداد تقریبی

در مورد تفریق اعداد تقریبی به راحتی می‌توان نشان داد که

$$e(a-b) \le e(a) + e(b)$$

اما، بنا بر تعریف $\delta(a-b) \simeq \frac{e(a-b)}{|a-b|}$ و اگر $|a-b|$ کوچک باشد خطای نسبی $a-b$ می‌تواند بزرگ باشد، که در نتیجه $a-b$ نادقیق خواهد بود.

۱ـ۸ـ۶ مثال

اگر A و B نزدیک به هم باشند و هدف محاسبهٔ $\frac{1}{A-B}$، با استفاده از حساب ممیز سیار، باشد خطامی‌تواند فاحش باشد. مثلاً، با حساب ممیز سیار چهاررقمی:

$$C = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}) - \pi} \simeq \frac{1}{(1/414 + 1/732) - 3/142}$$
$$= \frac{1}{0/004} = 250$$

در صورتی که، اگر به‌جای اعدادموجود در کسر C تقریبهایی تا ۹ رقم اعشار قرار دهیم و جواب راتا چهار رقم گرد کنیم خواهیم داشت

$$C = 214/1 \quad (4\ S)$$

در حالت کلی باید، حتی‌المقدور، از تفریق اعداد تقریبی نزدیک به‌هم اجتناب کرد. اصولاً، با توجه به ارتباط بین تعداد ارقام با معنای درست و دقت یک تقریب، علت اصلی نادقیق بودن $a-b$ کم شدن تعداد ارقام بامعناست که باید از وقوع آن جلوگیری کرد. مثلاً، به‌جای محاسبهٔ $\sqrt{2}-1$ بهتر است، $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ که از نظر ریاضی با آن برابر است، حساب شود، هرچند محاسبه مشکلتر می‌شود (به تمرینهای آخر بخش مراجعه کنید).

ج) ضرب اعداد تقریبی

در مورد ضرب اعداد تقریبی قضیهٔ زیر را داریم

۱ـ۸ـ۷ قضیه

اگر a و b، به ترتیب، تقریبهایی از A و B و این اعداد جملگی مثبت باشند

$$e(ab) \le a\,e(b) + b\,e(a)$$
$$\delta(ab) \le \delta(a) + \delta(b)$$

برهان

با توجه به تعریف خطای مطلق داریم

$$e(ab) = |AB - ab| = |AB - aB + aB - ab|$$
$$\le B\,|A - a| + a\,|B - b| = B\,e(a) + a\,e(b)$$

اما، اگر فرض کنیم $B = b + \varepsilon_b$، که در آن $|\varepsilon b| = e(b)$، در نتیجه

$$Be(a) = be(a) + \varepsilon_b e(a)$$

$\varepsilon_b\, e(a)$ در مقایسه با $be(a)$ قابل اغماض است و می‌توان نوشت

$$Be(a) \simeq be(a)$$

که در نتیجه حکم اول قضیه حاصل می‌شود.

برای اثبات قسمت دوم حکم، با توجه به تعریف خطای نسبی و قسمت اول قضیه، داریم

$$\delta(ab) \simeq \frac{e(ab)}{ab} \le \frac{a\,e(b) + b\,e(a)}{ab} = \frac{e(b)}{b} + \frac{e(a)}{a}$$
$$\simeq \delta(a) + \delta(b)$$

۱ـ۸ـ۸ نتیجه

قسمت اول قضیه ۱ـ۸ـ۷ نشان می‌دهد که اگر a یا b بزرگ باشد خطای ab می‌تواند قابل ملاحظه باشد. از این‌رو، باید حتی‌المقدور از ضرب اعداد تقریبی بزرگ اجتناب کرد و در صورت اجبار باید دقت این اعداد را بالا برد، مثلاً با دقت مضاعف کار کرد. قسمت دوم قضیه نیز نشان می‌دهد که ab می‌تواند نادقیقتر از a و b باشد. مثال زیر نشان می‌دهد که حتی ضرب اعداد نسبتاً کوچک هم در اعداد تقریبی گاهی اوقات ما را به جوابهای غیرقابل قبول هدایت می‌کند.

۱ـ۸ـ۹ مثال

فرض کنید

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx \quad (n \ge 1)$$

به راحتی، با انتگرال‌گیری جزء به جزء، ثابت می‌شود که

(۱۹.۱) $$I_n = ۱ - n I_{n-۱} \quad (n \geq ۲)$$

ضمناً، با توجه به این‌که $۰ \leq x \leq ۱$ داریم:

$$-۱ \leq x - ۱ \leq ۰$$

که از آن، با توجه به صعودی بودن تابع e^x، نتیجه می‌شود

$$e^{-۱} \leq e^{x-۱} \leq e^{۰}$$

و یا

$$e^{-۱} x^n \leq x^n e^{x-۱} \leq x^n$$

و اگر از طرفین نامساویهای بالا انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$e^{-۱} \int_{۰}^{۱} x^n \, dx \leq I_n \leq \int_{۰}^{۱} x^n \, dx$$

با توجه به این‌که $\int_{۰}^{۱} x^n \, dx = \frac{۱}{n+۱}$ داریم

$$\frac{e^{-۱}}{n+۱} \leq I_n \leq \frac{۱}{n+۱}$$

بنابراین، همواره $I_n > ۰$ و $\lim_{n \to \infty} I_n = ۰$

اکنون فرض کنید هدف تعیین $I_۹$ باشد. برای افرادی که به اشکالات محاسبه با اعداد تقریبی واقف نیستند طبیعی به نظر می‌رسد که $I_۱$ را حساب کنند و $I_۹$ را با استفاده از (۱۹.۱) به دست آورند. اگر چنین کنیم نتیجه به قرار زیر است

$$I_۱ = \int_{۰}^{۱} x e^{x-۱} dx = ۱ - \int_{۰}^{۱} e^{x-۱} dx = e^{-۱}$$

حال اگر قرار دهیم

$$I_۱ = e^{-۱} \simeq ۰/۳۶۷۸۷۹ \ (۶D)$$

خواهیم داشت:

$$I_۲ = ۱ - ۲\, I_۱ = ۰/۲۶۴۲۴۲$$
$$I_۳ = ۱ - ۳\, I_۲ = ۰/۲۰۷۲۷۴$$
$$I_۴ = ۱ - ۴\, I_۳ = ۰/۱۷۰۹۰۴$$
$$I_۵ = ۱ - ۵\, I_۴ = ۰/۱۴۵۴۸$$
$$I_۶ = ۱ - ۶\, I_۵ = ۰/۱۲۷۱۲$$
$$I_۷ = ۱ - ۷\, I_۶ = ۰/۱۱۰۱۶$$

$I_{۸}= ۱ - ۸\ I_{۷}= ۰/۱۱۸۷۲$

$I_{۹}= ۱-۹\ I_{۸}= - ۰/۰۶۸۴۸$

با توجه به این‌که $I_n > ۰$، جواب بالا ***غلط است***. چرا؟ مشاهده می‌کنید که ۰/۳۶۷۸۷۹ تقریبی از $I_۱$ است که خطایی حدود $۴/۴ \times ۱۰^{-۷}$ دارد. خطای $I_۲$ دو برابر خطای $I_۱$، صرف‌نظر از علامت آن، و خطای $I_۳$ سه برابر خطای $I_۲$، و یا ۶ برابر خطای $I_۱$ است و در نهایت خطای $I_۹$ برابر خطای $I_۱$ ضرب در !۹ است و داریم:

$۴/۴ \times ۱۰^{-۷} \times ۹!= ۰/۱۵۹۶۶۷۲ = ۰/۱۶\ (۲\ S)$

مشاهده می‌کنید که خطای اولیه $۴/۴ \times ۱۰^{-۷}$ منجر به خطای نهایی حدود ۰/۱۶ شده و مقدار $I_۹$ را منفی به دست داده است. اصطلاحاً گفته می‌شود که روش فوق برای محاسبهٔ مقدار $I_۹$ ***ناپایدار*** است.

اما، به راستی، $I_۹$ راچگونه باید حساب کرد؟

یکی از روشهای محاسبهٔ $I_۹$ آن است که تساوی (۱۹.۱) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$I_{n-۱}= \frac{۱ - I_n}{n} \quad , \quad (n \geq ۲)$$

و با قرار دادن، مثلاً، $I_{۱۶}= ۰$ به ترتیب $I_{۱۵}$، $I_{۱۴}$ تا $I_۹$ را حساب کنیم. در این صورت،

$$I_{۱۵}= \frac{۱}{۱۶}= ۰/۰۶۲۵$$

$$I_{۱۴}= \frac{۱ - I_{۱۵}}{۱۵}= ۰/۰۶۲۵$$

$$I_{۱۳}= ۰/۰۶۶۹۶۴۳\ (۷\ D)$$

$$I_{۱۲}= ۰/۰۷۱۷۷۲۰\ (۷\ D)$$

$$I_{۱۱}= ۰/۰۷۷۳۵۲۳\ (۷\ D)$$

$$I_{۱۰}= ۰/۰۸۳۸۷۷۱\ (۷\ D)$$

$$I_{۹}= ۰/۰۹۱۶۱۲۳\ (۷\ D)$$

حال سؤال این است که $I_۹$ دقیق است یا نه؟ و اگر بلی، چقدر دقیق است؟

برای پاسخ به این سؤالات می‌گوییم

$$۰ < I_{۱۶} \leq \frac{۱}{۱۷} \qquad (۲۰.۱)$$

از این‌رو، با قرارداد $I_{۱۶}= ۰$ خطایی به اندازهٔ ε مرتکب شده‌ایم که بنابر (۲۰.۱) $\varepsilon \leq \frac{۱}{۱۷}$. اما، در محاسبهٔ $I_{۱۵}$ این خطا بر ۱۶ تقسیم می‌شود. بعد در محاسبهٔ $I_{۱۴}$ بر ۱۵ تقسیم می‌شود و... در نهایت خطای ۰/۰۹۱۶۱۲۳ کمتر از مقدار کسر زیر است

$$\frac{۱}{۱۷ \times ۱۶ \times ... \times ۱۰} \simeq ۱/۰۲ \times ۱۰^{-۹}$$

یعنی، تمام ارقام ۰/۰۹۱۶۱۲۳ درست هستند!

د) تقسیم اعداد تقریبی

خطای تقسیم اعداد تقریبی در تمرینهای آخر این بخش آمده است.

۱ـ۸ـ۱۰ خودآزمایی

۱ـ اعداد زیر مفروض‌اند

۰/۱۰۰۱ ، ۰/۵۱۱۲ ، ۱/۵۴۳ ، ۳/۷۱۲ ، ۲۵/۵۴

۷۵/۶۱ ، ۲۲۵/۰ ، ۳۲۷/۶ ، ۹۹۱/۷

حاصلجمع این اعداد را به سه طریق زیر حساب کنید

الف) اعداد را از کوچک به بزرگ جمع کنید، به این ترتیب که ابتدا دو تای اول را جمع کنید و حاصلجمع را، در صورت لزوم، تا ۴ رقم بامعنا گرد کنید. سپس نتیجه را با عدد سوم جمع کنید، و حاصلجمع را تا چهار رقم بامعنا گرد کنید و همین‌طور تا به آخر.

ب) اعداد را از بزرگ به کوچک جمع کنید.

ج) حاصلجمع دقیق اعداد را، بدون گرد کردن، به دست آورید.

آیا جوابها متفاوت‌اند؟ کدام‌یک از جوابهای (الف) و (ب) دقیقتر است؟ از این تمرین چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

۲ـ اگر $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... ، a_n اعداد مثبتی باشند ثابت کنید (از قضایای ۱ـ۸ـ۴ و ۱ـ۸ـ۷ و استقرا استفاده کنید).

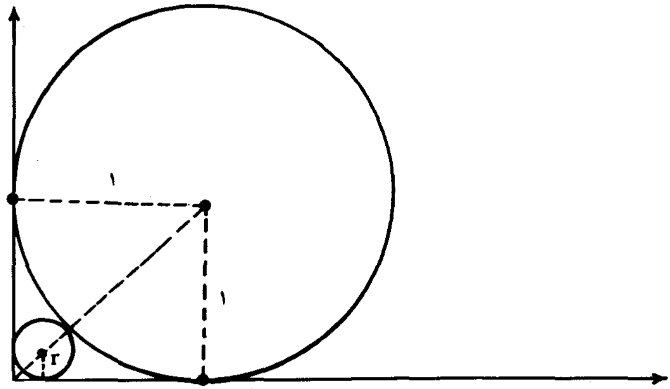
$$e(a_۱ + a_۲ + ... a_n) \leq e(a_۱) + ... + e(a_n)$$

$$\delta(a_۱ + ... + a_n) \leq \max\left\{\delta(a_۱), ..., \delta(a_n)\right\}$$

$$\delta(a_۱ \times a_۲ \times ... \times a_n) \leq \delta(a_۱) + ... + \delta(a_n)$$

۳ـ در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + ۲bx + c = ۰$ می‌دانیم که $b^۲ >> ac$ ($x >> y$ یعنی x خیلی از y بزرگتر است) ریشه‌های معادله را چگونه حساب کنیم تا خطای جوابها به حداقل برسد؟ (مثال عددی: $b = ۱$ و $a = c = ۱۰^{-۵}$)

۴ـ کُره‌ای به شعاع واحد با زمین و یک دیوار در تماس است. نشان دهید که شعاع کره‌ای که با زمین، دیوار و کُرهٔ قبلی در تماس باشد برابر $r = \frac{\sqrt{۲} - ۱}{\sqrt{۲} + ۱}$ است. در شکل ۱ـ۵ مقطعی از کُره‌ها، دیوار و زمین مشاهده می‌شود.



شکل ۱ـ۵

نشان دهید که حجم کُرهٔ کوچک برابر است با:

$$V_۲ = \frac{۴\pi}{۳}\left(\sqrt{۲}-۱\right)^{۶} \quad \text{یا} \quad V_۱ = \frac{۴\pi}{۳}\left(\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}\right)^{۳}$$

$$V_۴ = \frac{۴\pi}{۳\left(۹۹+۷۰\sqrt{۲}\right)} \quad \text{یا} \quad V_۳ = \frac{۴\pi}{۳\left(\sqrt{۲}+۱\right)^{۶}}$$

با فرض، $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴\ (۴\ S)$ و $\pi = ۳/۱۴۲\ (۴\ S)$ کدام‌یک از $V_۱$ تا $V_۴$ تقریب بهتری برای حجم کُرهٔ کوچک به دست می‌دهد (عملیات را تا ۴ S انجام دهید)؟ چرا؟

۵ـ نشان دهید اگر $|x| \ll ۱$ آن‌گاه $\frac{۱}{۱+x} \simeq ۱ - x$

۶ـ فرض کنید $A = a + \varepsilon_a$ و $B = b + \varepsilon_b$، با استفاده از تمرین ۵، ثابت کنید

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \simeq \left|\frac{\varepsilon_a}{a} - \frac{\varepsilon_b}{b}\right| \leq \delta(a) + \delta(b)$$

۱ـ۹ خطای محاسبهٔ توابع

حتماً مشاهده کرده‌اید که اکثر ماشین حسابهای مورد استفاده دارای کلیدهای تابعی هستند. با واردکردن یک عدد و بعد فشار یک یا دو کلید، می‌توانید مقدار توابعی چون e^x، $\sin x$، $\cos x$، $\text{tg } x$، $\text{Log}_{۱۰}x$، $\ln x$، $\text{arc sin } x$، $\text{arc cos } x$ و $\text{arc tg } x$ و بعضاً توابع هیپربولیک را حساب کنید. قبل از این‌که ماشین حساب و کامپیوتر رایج شود معمولاً مقادیر این توابع، آن هم در بعضی نقاط، از روی جدول تعیین می‌شد. (هنوز هم در آخر بعضی از کتابهای دبیرستان جداول لگاریتم و خطوط مثلثاتی وجود دارد).

در این بخش می‌خواهیم نحوهٔ محاسبهٔ تقریبی از یک تابع را شرح دهیم و خطای آن را حساب کنیم. قبلاً به یک مثال توجه کنید.

۱-۹-۱ مثال

تقریبی از $e^{\frac{2}{3}}$ را با خطای کمتر از 10^{-2} حساب کنید

حل: ابتدا توضیح می‌دهیم که منظور از $e^{\frac{2}{3}}$ چیست. می‌دانیم که ***بسط ماکلورن*** تابع e^x چنین است:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

منظور از $e^{\frac{2}{3}}$ مقدار سری زیر است

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3!} + \dots + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!} + \dots \tag{21.1}$$

امّا محاسبهٔ تمام جملات سری بالا و بعد جمع کردن آنها عملاً ممکن نیست. ضمناً در ماشین حساب یا کامپیوتر نمی‌توان عدد $\frac{2}{3}$ را دقیقاً ذخیره کرد. از این‌رو، در عمل تقریبی اعشاری از $\frac{2}{3}$ اختیار می‌کنیم و تعدادی از جملات ابتدای سری (۲۱.۱) را محاسبه و با هم جمع می‌کنیم. مثلاً، برای دقت $\varepsilon = 10^{-2}$ قرار می‌دهیم: $\bar{x} = 0/667$ و جملات سری (۲۱.۱) را تا جایی حساب می‌کنیم که مقدار آنها از نصف ε یعنی $0/005$ کمتر نباشد. (البته مقادیر حساب شده را نیز تا سه رقم اعشار گرد می‌کنیم).

$$e^{\frac{2}{3}} \simeq 1 + 0/667 + 0/222 + 0/049 + 0/008 + 0/001$$

بنابراین،

$$e^{\frac{2}{3}} \simeq 1/947$$

اگر $e^{\frac{2}{3}}$ را از ماشین حساب بگیرید خواهید داشت:

$$e^{\frac{2}{3}} = 1/94773404\dots$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\left| e^{\frac{2}{3}} - 1/947 \right| = 0/00073404\dots < 0/01$$

توجیه عملیات بالا را در زیر مشاهده می‌کنید.

۱-۹-۲ بسط ماکلورن یک تابع

اگر تابع f در مجاورت صفر تعریف شده باشد و مشتقات آن، از هر مرتبه، موجود باشد داریم:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\dots \qquad (22.1)$$

برای به‌دست آوردن بسط ماکلورن یک تابع باید مشتقات آن را در صفر حساب کنیم و در رابطهٔ (۲۲.۱) قرار دهیم. بسط ماکلورن چند تابع، جهت اطلاع و به‌کار بردن آنها در تمرینهای آخر این بخش، در زیر آمده است.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots$$

$$\sinh x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\dots$$

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\dots$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{8}+-\dots$$

مشاهده می‌شود که هر تعداد متناهی از جملات ابتدای بسط ماکلورن تابع f را اختیار کنیم یک چند جمله‌ای به‌دست می‌آید. پس می‌توان نوشت

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

که در آن،

$$P_n(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

و

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)+\dots$$

$R_n(x)$ را باقیماندهٔ سری مساوی $f(x)$ می‌نامند. در صورتی که به ازای هر x از دامنهٔ f داشته باشیم

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \tag{۲۳.۱}$$

می‌توان روشی عملی برای محاسبهٔ تقریبی از $f(x)$ به‌ازای هر نقطه از دامنه‌اش ارائه کرد.

برای محاسبهٔ تقریبی از $f(x)$ با خطای مطلق کمتر از ε داده شده، ابتدا تقریبی از x چون $\bar{x}$ انتخاب می‌کنیم که $x - \bar{x}$ کوچک باشد و بعد به‌جای محاسبهٔ $P_n(x)$ مقدار $P_n(\bar{x})$ را حساب می‌کنیم. این خطایی تولید می‌کند که به طریق زیر قابل محاسبه است (البته به‌طور تقریبی).

با استفاده از بسط تیلر تابع $P_n(x)$ حول نقطهٔ $\bar{x}$ ، تا مشتق مرتبهٔ دوم، داریم:

$$P_n(x) = P_n(\bar{x}) + (x - \bar{x}) P'_n(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} P''_n(\eta) \quad \text{و} \quad (\eta \text{ بین } \bar{x}, x)$$

در عمل ε کوچک است و $\bar{x}$ راگرد شدهٔ x به‌گونه‌ای می‌گیریم که $|\bar{x} - \bar{x}|$ خیلی از ε کوچکتر باشد. مثلاً $|x - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{20}$. بنابراین، با توجه به این‌که $(x - \bar{x})^2$ بسیار کوچک است، می‌توان نوشت:

$$P_n(x) \simeq P_n(\bar{x}) + (x - \bar{x}) P'_n(\bar{x})$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$f(x) \simeq P_n(\bar{x}) + (x - \bar{x}) P'_n(\bar{x}) + R_n(x). \tag{۲۴.۱}$$

آنچه ماشین حساب یا کامپیوتر به ما می‌دهد $P_n(\bar{x})$ است. بنابراین، n و $\bar{x}$ چنان انتخاب می‌شوند که

$$|f(x) - P_n(\bar{x})| < \varepsilon$$

برای این منظور می‌گوییم از (۲۴.۱) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(\bar{x})| &\lesssim |(x - \bar{x}) P'_n(\bar{x}) + R_n(x)| \\ &\lesssim |x - \bar{x}| \, |P'_n(\bar{x})| + |R_n(x)| \end{aligned}$$

از این‌رو، کافی است نامساویهای زیر برقرار باشند

$$\begin{cases} |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |(x - \bar{x}) P'_n(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{۲۵.۱}$$

نامساوی اول، با فرض (۲۳.۱)، از مرتبه‌ای به بعد برقرار است ولی نامساوی دوم بستگی به مقدار نامشخص $P'_n(\bar{x})$ دارد. در عمل با اعمال محدودیتهایی روی $\bar{x}$ و x می‌توان نامساوی دوم را نیز برقرار کرد. بنابراین، فرض می‌شود

$$|x| \leq ۱$$

یا برای توابع مثلثاتی

$$|x| \leq \frac{\pi}{۲}$$

این محدودیتها بزرگ نبودن $P'_n(\bar{x})$ را، با توجه به چند جمله‌ای بودن آن و این که ضرایب این چندجمله‌ای اعداد کوچک هستند، تضمین می‌کند. در وسایل محاسباتی $\bar{x}$ گرد شدهٔ x تا آخرین رقمی است که ماشین قادر به ذخیره است. ولی برای محاسبهٔ دستی اگر $\varepsilon=۱۰^{-k}$ کافی است $\bar{x}$ را گرد شدهٔ x تا $(k+۱)$ رقم اعشار اختیار کنید. در این صورت بنابر (۱۳.۱):

$$|x-\bar{x}| \leq ۵\times ۱۰^{-(k+۲)}=\frac{\varepsilon}{۲۰}$$

برای اکثر توابع، با این انتخاب نامساوی دوم (۲۵.۱) نیز برقرار خواهد بود. البته لازم به تذکر است که در حالت کلی نباید ابتدا n را چنان به‌دست آورد که نامساوی اول (۲۵.۱) برقرار باشد بلکه، همان‌طور که در مثال (۱ـ۹ـ۱) گفته شد، جملات را تا جایی حساب می‌کنیم که قدرمطلق آخرین جمله از $\varepsilon/۲$ کمتر باشد (چون این جمله را حساب کرده‌ایم آن را به مجموع جملات قبلی اضافه می‌کنیم).

۱ـ۹ـ۳ مثال

تقریبی از $\sin x$ را به‌ازای $x=\frac{\pi}{۱۱}$ با خطای کمتر از $۱۰^{-۴}$ حساب کنید.

حل: قرار می‌دهیم: $\bar{x}=۰/۲۸۵۶۰$ ($\bar{x}$ گرد شدهٔ x تا پنج رقم اعشار است). و جملات سری مربوط به $\sin x$ را تا جایی حساب می‌کنیم که قدر مطلق جملهٔ آخر از $۰/۰۰۰۰۵=\frac{۱۰^{-۴}}{۲}$ کمتر باشد.

$$\sin\frac{\pi}{۱۱}\simeq ۰/۲۸۵۶۰-۰/۰۰۳۸۸+۰/۰۰۰۰۲$$

مشاهده کنید که جملات نیز تا پنج رقم اعشار، یعنی تعداد ارقام اعشار $\bar{x}$ ، گرد شده‌اند. بنابراین،

$$\sin\frac{\pi}{۱۱}=۰/۲۸۱۷۴\ (۵\,S)$$

اگر $\sin\frac{\pi}{۱۱}$ را از ماشین حساب بگیرید دارید:

$$\sin\frac{\pi}{۱۱}=۰/۲۸۱۷۳۲۵۵\ldots$$

که قدرمطلق خطای مقدار محاسبه شده حدود ۰/۰۰۰۰۰۷ است که از $۱۰^{-۴}$ کمتر است.

۱ـ۹ـ۴ خودآزمایی

۱ـ تقریبی از توابع زیر را به ازای x داده شده، باخطای مطلق کمتر از ε داده شده حساب کنید و مقدار تقریبی را با مقداری که به ازای x از ماشین حساب می‌گیرید مقایسه کنید.

e^x , $x=-\frac{۳}{۷}$, $\varepsilon=۱۰^{-۵}$

$\sin x$, $x=\frac{-۱}{۷}$, $\varepsilon=۱۰^{-۵}$

$\cos x$, $x=\frac{\pi}{۷}$, $\varepsilon=۱۰^{-۵}$

$\sinh x$, $x=\frac{\pi}{۸}$, $\varepsilon=۱۰^{-۵}$

$\cosh x$, $x=\frac{۱}{۹}$, $\varepsilon=۱۰^{-۵}$

$\log_e(۱+x)$, $x=\frac{۲}{۳}$, $\varepsilon=۱۰^{-۲}$

$\text{arc tg}\, x$, $x=\frac{\pi}{۱۱}$, $\varepsilon=۱۰^{-۲}$

۲ـ می‌دانیم که، به‌ازای $x \neq ۰$،

$$\frac{\sin x}{x}=۱-\frac{x^۲}{۳!}+\frac{x^۴}{۵!}-\frac{x^۶}{۷!}+-\dots$$

با استفاده از تساوی بالا تقریبی از $\frac{\sin x}{x}$ را به‌ازای $x=۱$ با خطای مطلق کمتر از $۱۰^{-۵}$ حساب کنید.

۱ـ۱۰ تمرینهای تستی

زمان پاسخگویی به هر تست، به‌طور متوسط، دو دقیقه است.

۱ـ کدام جزء منابع خطا نیست؟

۱) خطای داده‌ها ۲) خطای روش ۳) خطای برشی ۴) خطای مدل

۲ـ برای محاسبهٔ تقریبی $(۱-\sqrt{۲})^۴$ کدام عبارت تقریب دقیقتری به‌دست می‌دهد.
(کنکور کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، سال ۷۲)

۱) $۱۷-۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{(\sqrt{۲}+۱)^۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}$ ۴) $(\sqrt{۲}-۱)^۴$

۳ـ برای محاسبهٔ تقریبی $\frac{۱}{(\sqrt{۲}+۱)^۶}$ کدام عبارت تقریب دقیقتری به‌دست می‌دهد؟

۱) $۹۹-۷۰\sqrt{۲}$ ۲) $[\sqrt{۲}-۱]^۶$ ۳) $[\sqrt{۲}+۱]^{-۶}$ ۴) $\frac{۱}{۹۹+۷۰\sqrt{۲}}$

(کنکور آزمایشی فرهنگستان ریاضی، سال ۷۲)

۴ـ کدام جزء منابع خطاست؟

۱) خطای مطلق ۲) خطای برشی ۳) خطای نمایش اعداد ۴) خطای نسبی

۵ـ اگر $A = ۱/۵$ و $a = ۱/۵۵$ تقریبی از A باشد خطای نسبی a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳۱}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳۱}$

۶ـ اگر $y=\frac{ab}{c}$ و δ_a، δ_b، δ_c و δ_y به ترتیب خطای نسبی a، b، c و y باشند کدام رابطه درست است؟ (کنکور کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، سال ۷۲)

۱) $\delta_y \le \delta_a + \delta_b + \delta_c$ ۲) $\delta_y \le \delta_a + \delta_b - \delta_c$

۳) $\delta_c \le \delta_a + \delta_b + \delta_y$ ۴) $\delta_y \le \frac{\delta_a \times \delta_b}{\delta_c}$

۲

حل معادلات غیرخطی

مقدمه

حل بسیاری از مسائل اجتماعی، اقتصادی و علمی منجر به حل معادله‌ای به شکل

$$f(x) = ۰ \qquad (۱.۲)$$

می‌شود. منظور از حل معادلهٔ (۱.۲) تعیین عدد یا اعدادی است که مقدار تابع به ازای آنها صفر شود. اگر $f(\alpha) = ۰$ آنگاه α را یک ریشهٔ معادلهٔ (۱.۲) می‌نامند یا می‌گویند α یک صفر تابع f است. معادلهٔ (۱.۲) برحسب نوع تابع f به چند دسته تقسیم می‌شود.

الف) تابع f یک چند جمله‌ای مانند

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \dots + a_۰$$

است. معادلهٔ $P(x) = ۰$ را یک **معادلهٔ چندجمله‌ای** یا **معادلهٔ جبری** می‌نامند. بحث در تعیین ریشه‌های این معادله را، وقتی $n > ۲$، به فصل سوم موکول می‌کنیم.

ب) تابع f شامل یک یا چند تابع متعالی است. توابع مثلثاتی، نظیر $\sin x$، $\cos x$ و ... ، توابع معکوس مثلثاتی، نظیر $\arcsin x$ و $\arccos x$ و ... و توابع نمایی و معکوس نمایی، مانند e^x ، $\log x$ را توابع متعالی می‌نامند. اگر f شامل توابع متعالی باشد معادلهٔ (۱.۲) را یک **معادلهٔ متعالی** می‌نامیم. در این فصل به حل عددی معادلات متعالی می‌پردازیم. لازم به تذکر است که هدف اصلی تعیین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۱.۲) است.

هدفهای کلی

۱ـ ارائه نمونه‌هایی از مسائل کاربردی ـ اجتماعی که حل آنها منجر به حل یک معادله متعالی می‌شود.

۲ـ بررسی روشهای تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه‌های حقیقی یک معادله.

۳ـ بررسی روشهای زیر برای تعیین تقریبی از ریشه‌های حقیقی یک معادله با دقت مطلوب.

الف) روش دوبخشی (یا تنصیف)

ب) روش نابه‌جایی
ج) روش تکرار ساده
د) روش نیوتن
هـ) روش وتری (خط قاطع)

۴ـ بحث در واگرایی، همگرایی و سرعت همگرایی روشها و بالاخره مقایسهٔ روشها.

*۵ـ حل عددی دستگاه معادلات غیرخطی دومجهولی به روش تعمیم یافتهٔ نیوتن.

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:

۱ـ تعداد و محل تقریبی ریشه‌های حقیقی یک معادله را با روش مناسب تعیین کند.

۲ـ تقریبی از مقدار یک ریشه را با دقت مطلوب و به روش خواسته شده حساب کند.

۳ـ تقریبی از تمام ریشه‌های حقیقی یک معادله را با روش(های) مناسب محاسبه کند.

۴ـ اختلاف روشها را از نظر مطمئن بودن یا نبودن همگرایی و تعداد عملیات برای رسیدن به یک تقریب مناسب را بیان کند.

*۵ـ تعداد و حدود ریشه‌های یک دستگاه ساده از معادلات دومجهولی غیرخطی را تعیین و تقریبی از آنها را با دقت مطلوب حساب کند.

۲ـ حل معادلات متعالی

۲ـ۱ یک مسئلهٔ کاربردی

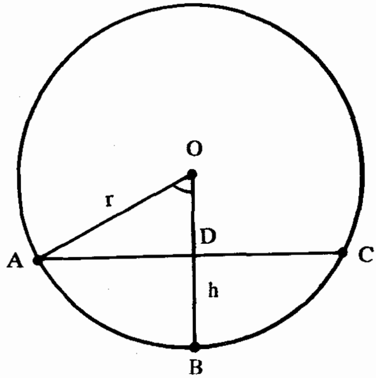
در این قسمت مسئله‌ای را بررسی می‌کنیم که حل آن منجر به تعیین ریشه‌ای از یک معادلهٔ متعالی می‌شود.

فرض کنید یک مخزن استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r داریم که $\frac{1}{4}$ آن پر از مایع است. (مثلاً، مخزن گازوئیل که در اکثر منازل شوفاژدار موجود است.) و این مخزن طوری قرار دارد که محور آن افقی است. می‌خواهیم ارتفاع مایع را در این مخزن بیابیم (شکل ۲ـ۱).

فرض کنید ارتفاع مایع h باشد یعنی، $DB=h$. طبق فرض مسئله، باید مساحت قطعهٔ ABC مساوی $\frac{1}{4}$ مساحت دایره باشد اما، مساحت قطعهٔ ABC دو برابر مساحت قطعهٔ ADB است. از این‌رو، به تعیین مساحت قطعهٔ ADB می‌پردازیم. مساحت قطعهٔ ADB مساوی مساحت قطاع OAB منهای مساحت مثلث OAD است.

در مثلث OAD داریم:

$$AD= r \sin \theta \quad , \quad OD= r \cos \theta$$



شکل ۲ـ۱ مقطع عرضی مخزن استوانه‌ای

بنابراین،

$$\text{مساحت مثلث OAD} = \frac{۱}{۲}(r \sin\theta \times r\cos\theta) = \frac{۱}{۲} r^{۲} \sin\theta\cos\theta$$

همچنین مساحت قطاع OAB برابر است با $\frac{۱}{۲} r^{۲}\theta$ که در آن θ زاویه مرکزی روبه‌روی کمان AB (بر حسب رادیان) است. پس باید داشته باشیم

$$۲\left[\frac{۱}{۲}r^{۲}\theta - \frac{۱}{۲}r^{۲}\sin\theta\cos\theta\right] = \frac{۱}{۴}\pi r^{۲}$$

با ضرب طرفین رابطهٔ بالا در $\frac{۲}{r^{۲}}$ نتیجه می‌شود

$$۲\theta - ۲\sin\theta\cos\theta = \pi/۲$$

و یا، با توجه به اینکه

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$$

(۲.۲)

$$\left(\frac{\pi}{۲} - ۲\theta\right) + \sin ۲\theta = ۰$$

با فرض

(۳.۲)

$$x = \frac{\pi}{۲} - ۲\theta$$

داریم

$$۲\theta = \frac{\pi}{۲} - x,$$

و از آنجا

$$\sin ۲\theta = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \cos x$$

در نتیجه معادلهٔ (۲.۲)، با توجه به (۳.۲)، به شکل زیر درمی‌آید که یک معادلهٔ متعالی است.

$$x + \cos x = ۰ \qquad (۴.۲)$$

پس‌ازحل مسئلهٔ متعالی(۴.۲) می‌توان h را،باتوجه‌به‌شکل(۲ـ۱)،از روابط زیر به‌دست‌آورد.

$$h = OB - OD = r - r\cos\theta$$
$$= r\left(۱ - \cos\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲}\right)\right)$$

با استفاده از مسئلهٔ بالا می‌توان یک مخزن‌را درجه‌بندی کرد و بر حسب ارتفاع مایع داخل آن به مقدار مایع پی برد. معادلهٔ (۴.۲) در طول این فصل به روشهای گوناگون حل خواهد شد.

۲ـ۲ تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه‌ها

معمولاً برای تعیین ریشه‌ای از یک معادله، با دقت مطلوب، لازم است که تقریبی از آن ریشه یا بازهٔ کوچکی که حاوی آن ریشه باشد را معلوم کرد. در این بخش روشهای موجود برای تعیین تعداد و حدود تقریبی ریشه‌های حقیقی یک معادله را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دو روش برای این کار موجود است:

الف) رسم منحنی   ب) جدول‌بندی مقادیر تابع

در بخش بعد دو روش را شرح می‌دهیم و نقاط قوت و ضعف هریک را بیان می‌کنیم.

۲ـ۲ـ۱ رسم منحنی

در این روش منحنی

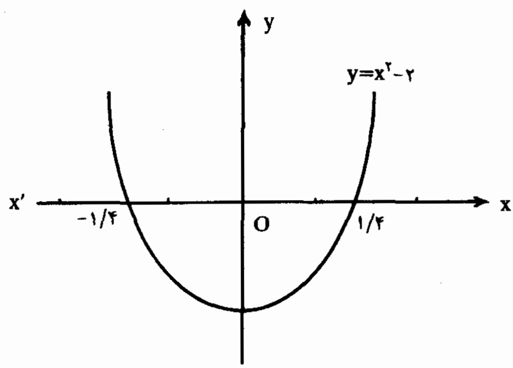
$$y = f(x)$$

را رسم می‌کنیم. اگر α ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ باشد داریم $f(\alpha) = ۰$ یعنی، نقطهٔ $A\Big|_{۰}^{\alpha}$ روی منحنی $y = f(x)$ قرار دارد. اما، نقطهٔ A روی محور $x'ox$ است. پس، باید نقاط تلاقی منحنی بالا را با محور $x'ox$ تعیین کنیم. طول این نقاط ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ هستند. در حالت کلی رسم منحنی $y = f(x)$، بدون استفاده از ماشین حساب و به کمک نقطه‌یابی، به سادگی امکان‌پذیر نیست و باید از کامپیوتر و بسته‌های نرم‌افزاری مناسب نظیر DERIVE، MATLAB یا MATHEMATICA، استفاده کرد. با وجود این، دانستن روشهای دستی نیز خالی از فایده نیست و اکثر اوقات رفع نیاز می‌کنند.

۲ـ۲ـ۲ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = x^۲ - ۲ = ۰$ را تعیین کنید.

منحنی $y= x^{۲} - ۲$ را رسم می‌کنیم. مشاهده می‌شود که معادله دو ریشه دارد که تقریباً ۱/۴- و ۱/۴ هستند (شکل ۲ـ۲).



شکل ۲ـ۲

آیا رسم منحنی $y= f(x)$ همیشه به این سادگی است؟ واضح است که نه. مثلاً، منحنی

$$y= x + \cos x$$

را به این سادگی نمی‌توان رسم کرد.

بعضی اوقات می‌توان $f(x)$ را به صورت تفاضل دو تابع، که رسم آنها ساده است، نوشت. فرض کنید داریم

$$f(x)= f_{۱}(x) - f_{۲}(x) \tag{۵.۲}$$

منحنیهای زیر را رسم می‌کنیم

$$y_{۱}=f_{۱}(x)$$

$$y_{۲}=f_{۲}(x)$$

حال می‌گوییم اگر $f(\alpha)= ۰$ آن‌گاه

$$f_{۱}(\alpha)-f_{۲}(\alpha)=۰$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$f_{۱}(\alpha)=f_{۲}(\alpha)=\beta$$

یعنی نقطهٔ $A\Big|_{\beta}^{\alpha}$ روی هر دو منحنی $y_{۱}$ و $y_{۲}$ قرار دارد. به عبارت دیگر، α طول نقطهٔ تقاطع منحنیهای $y_{۱}$ و $y_{۲}$ است. از این‌رو، منحنیها را رسم می‌کنیم و طول *نقاط* برخورد آنها را به‌دست می‌آوریم.

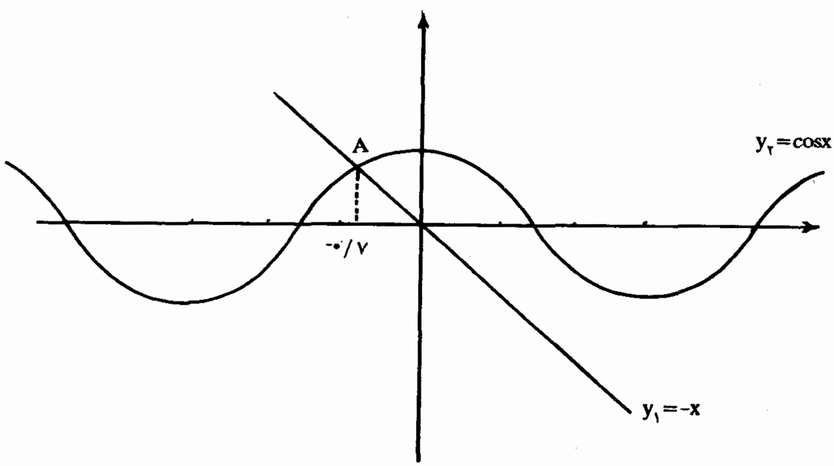
۲ـ۲ـ۳ مثال

حدود و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(x)= x + \cos x= ۰$ را تعیین کنید. تابع $f(x)$ را به‌صورت (۵.۲) می‌نویسیم، یعنی

$$f(x)= \cos x - (-x)$$

حال توابع زیر را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۳).

$$\begin{cases} y_۱= -x \\ y_۲= \cos x \end{cases}$$



شکل ۲ـ۳

شکل (۲ـ۳) نشان می‌دهد که معادلهٔ مورد نظر فقط یک ریشه دارد که مقدار آن تقریباً $-۰/۷$ است.

۲ـ۲ـ۴ مثال

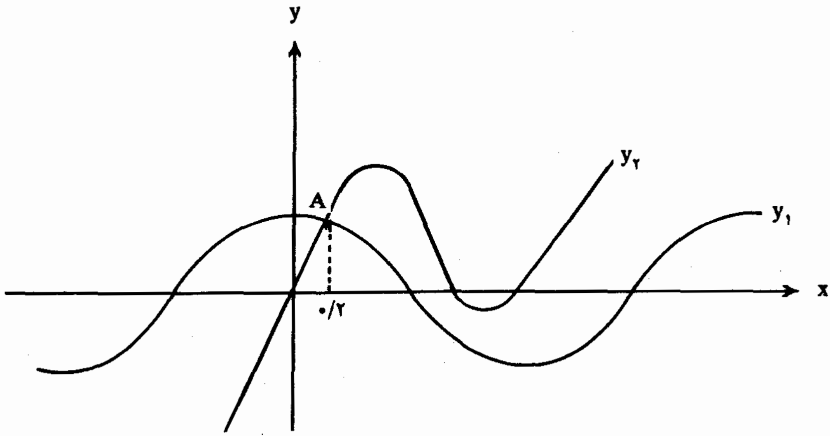
تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادلهٔ زیر را تعیین کنید

$$\cos x= x (x - ۲)(x - ۳)$$

منحنیهای زیر را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۴).

$$y_۱= \cos x$$

$y_۲ = x\,(x - ۲)(x - ۳)$



شکل ۲ـ۴

شکل (۲ـ۴) نشان می‌دهد که معادله یک ریشه دارد که مقدار تقریبی آن ۰/۲ است. اما، این تدبیر همیشه کارگر نیست. به مثال زیر توجه کنید.

۲ـ۲ـ۵ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه(های) معادلهٔ زیر را تعیین کنید.

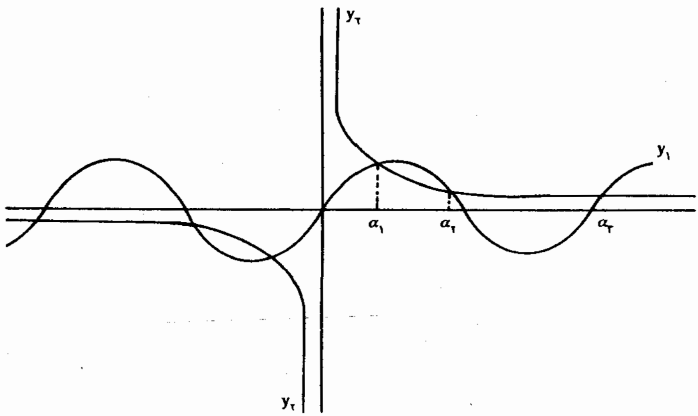
$$x \sin x - ۱ = ۰ \qquad (۶.۲)$$

در اینجا تابع $f(x)$ به شکل تفاضل دو تابع $f_۱(x) = x \sin x$ و $f_۲(x) = ۱$ است. ولی رسم تابع $y_۱ = x \sin x$ ساده نیست. (منظور این است که به راحتی با تعیین دو سه نقطه قابل رسم نیست.) در این حالت می‌توان گفت که چون $x = ۰$ ریشهٔ معادله (۶.۲) نیست می‌توان طرفین آن را بر x تقسیم کرد و به‌دست آورد.

$$\sin x - \frac{۱}{x} = ۰ \qquad (۷.۲)$$

واضح است که مجموعه جوابهای (۶.۲) و (۷.۲) یکسان است (البته، منحنی نمایش آنها یکسان نیست). از این‌رو، کافی است معادلهٔ (۷.۲) را بررسی کنیم. برای این منظور منحنیهای زیر را رسم می‌کنیم و طول نقاط تلاقی آنها را به‌دست می‌آوریم (شکل ۲ـ۵).

$$\begin{cases} y_۱ = \sin x \\ y_۲ = \dfrac{۱}{x} \end{cases}$$



شکل ۲ـ۵

اولاً، با توجه به تابع $f(x)=\sin x-\frac{1}{x}$، اگر $f(\alpha)=0$ آن‌گاه

$$f(-\alpha)=-f(\alpha)=0 \qquad (۲ـ۴)$$

یعنی، ریشه‌ها نسبت به مبدأ قرینه‌اند. شکل (۲ـ۴) نشان می‌دهد که معادله دارای بی‌نهایت ریشهٔ مثبت است. α_1 در نزدیکی ۱ و بقیه در مجاورت $k\pi$، $k=1, 2, \ldots$، قرار دارند (نزدیک نقاطی که $\sin x$ صفر می‌شود).

۲ـ۲ـ۶ جدول‌بندی مقادیر تابع

در این روش می‌توان ریشه‌هایی را که تابع f در دو طرف آنها تغییر علامت می‌دهد پیدا کرد. قبل از توضیح این روش تعریف زیر و قضیهٔ ۲ـ۲ـ۸ را بیان می‌کنیم.

۲ـ۲ـ۷ تعریف

فرض کنید

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \quad , \quad \left(g(\alpha)\neq 0,\ m\in N\right)$$

اگر $m>1$ می‌گوئیم α ریشهٔ *تکراری* معادلهٔ $f(x)=0$ است و مرتبهٔ تکرار آن *m* است. این تعریف نشان می‌دهد که اگر m زوج باشد تابع f در نزدیکی α تغییر علامت نمی‌دهد یعنی $f(x)$ در نزدیکی $x=\alpha$ و دو طرف آن دارای یک علامت است.

۲ـ۲ـ۸ قضیه

(بولتزانو ـ وایرشتراس): اگر تابع f بر $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد و $f(a)\ f(b)\ <\ 0$ آن‌گاه حداقل یک نقطه مانند c هست که $a<c<b$ و $f(c)=0$. به‌عبارت دیگر، معادلهٔ $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در (a,b) دارد. به‌علاوه، اگر f بر $[a,b]$ اکیداً یکنوا (یعنی، صعودی یا نزولی باشد) c منحصر به فرد است. (این قضیه در آنالیز ثابت می‌شود. ر.ک. [۱۰]).

در عمل وقتی بخواهیم تعداد و محل تقریبی ریشه‌هایی از $f(x)=0$ را، که f در دو طرف آنها تغییر علامت می‌دهد، و در بازهٔ $[A\ ,\ B]$ قرار دارند، تعیین کنیم این بازه را بـه n قسـمت متساوی تقسیم می‌کنیم و n را آن‌قدر بزرگ اختیار می‌کنیم که نقاط تقسیم به اندازهٔ کافی به هم نزدیک باشند. در این صورت، فاصلهٔ نقاط متوالی عبارت است از

$$h=\frac{B-A}{n}$$

و نقاط عبارت‌اند از (شکل ۲ـ۶)

$$x_0= A\ \ ,\ \ x_i= x_0 + ih,\ i= 1, 2,\dots, n$$

شکل ۲ـ۶

بعد قرار می‌دهیم:

$$\gamma_i= f(x_i)\ f(x_{i+1})$$

و سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

I. اگر $\gamma_i<0$ آن‌گاه حداقل یک ریشه در $(x_i\ ,\ x_{i+1})$ موجود است. برای توابع هموار و h کوچک، معمولاً یک ریشه موجود است.

II. اگر $\gamma_i>0$ ممکن است معادله در $(x_i\ ,x_{i+1})$ ریشهٔ تکراری با مرتبهٔ تکرار زوج داشته باشد. (مثلاً، برای $f(x)= \cos x-1=0$ صفر ریشهٔ تکراری مرتبهٔ دوم است و f در مجاورت $\alpha=0$ تغییر علامت نمی‌دهد.) این ظن وقتی قوی می‌شود که γ_i خیلی کوچک باشد (و وقتی رد می‌شود که γ_i کوچک نباشد). به هر جهت تعیین این‌گونه ریشه‌ها آسان نیست و به تمهیدات بیشتری نیاز دارد.

III. اگر $\gamma_i=0$ آن‌گاه $f(x_i)=0$ یا $f(x_{i+1})=0$. روش بالا را تنها با یک ماشین‌حساب یا کامپیوتر می‌توان به‌طور مؤثر به کار برد. برای توابع هموار معمولاً h حدود ۰/۱ اختیار می‌شود اما، می‌توان n را متغیر گرفت، و بر حسب نوع تابع، با افزایش آن تعداد ریشه‌هایی که تابع در دو طرف آنها تغییر علامت می‌دهد را تعیین کرد.

۲-۲-۹ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=\sin x-x+0/5=0$ را تعیین کنید.

با توجه به اینکه همواره $-1\le \sin x\le 1$ داریم

$$-x-0/5\le f(x)\le 1/5-x$$

از این‌رو، اگر $1/5-x<0$ آن‌گاه $f(x)<0$ یعنی ریشه‌ای در $(1/5, \infty)$ موجود نیست و اگر $-x-0/5>0$ آن‌گاه $f(x)>0$ و معادله در $(-\infty, -0/5)$ نیز ریشه ندارد. پس باید بازهٔ $[-0/5, 1/5]$ را مورد بررسی قرار دهیم. جدول (۲-۶) نشان می‌دهد که معادله در $(-0/5, 1/5)$ یک ریشه دارد (اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند).

جدول ۲-۶

x	$-0/5$	۱	۱/۵
sin x	$-0/4794$	$0/8415$	$0/9975$
f(x)	$0/5206$	$0/3415$	$-0/0025$

از جدول (۲-۶) و با توجه به مقادیر $f(1)$ و $f(1/5)$، ریشه باید نزدیک ۱/۵ باشد. با توجه به این‌که

$$f(1/4)=0/047 \quad (3D)$$

نتیجه‌می‌گیریم‌که $\alpha\in(1/4, 1/5)$، مثلاً $\alpha\sim 1/45$. چون $f'(x)=\cos x-1\le 0$ تابع f اکیداً نزولی است و لذا، تنها یک ریشه موجود است. البته تعیین ریشه‌های معادلهٔ $\sin x-x+0/5=0$ به روش رسم منحنی ساده‌تر است (امتحان کنید).

۲-۲-۱۰ مثال

بدون رسم منحنی ثابت کنید معادلهٔ زیر تنها یک ریشه دارد.

$$f(x)=x^2-(1-x)^5=0 \qquad (8.2)$$

اولاً، $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ پس حداقل یک ریشه در $(0, 1)$ موجود است. اما چون $f'(x)=2x+5(1-x)^4$، در صورتی که $x\ge 0$ داریم $f'(x)>0$. یعنی، تابع f در $[0, +\infty[$ اکیداً صعودی است. بنابراین، معادله (۸.۲) تنها یک ریشهٔ مثبت دارد. اکنون ثابت می‌کنیم که این معادله ریشهٔ منفی ندارد. برای این منظور نشان می‌دهیم که اگر $x<0$ آن‌گاه $f(x)<0$ زیرا،

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5) \\ &= x^2 - 1 + 5x - 10x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5 \\ &= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

حال چون ضریب توانهای فرد x مثبت و ضریب توانهای زوج x منفی است نتیجه می‌گیریم که اگر $x<0$ آنگاه $f(x)<0$.

۲-۲-۱۱ خودآزمایی

۱- تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادلات زیر را، با رسم منحنیهای مناسب تعیین کنید.

$x^2 \sin x = 1$ $x - \cos x = 0$

$x - tg\,\alpha = 0$ $3xe^x - 1 = 0$

$2^x - x^2 = 0$ $x^2 \cos^2 x - 1 = 0$

$e^x + 1 = 0$ $\sin x = x(x-2)(x-3)$

$x + \sin^2 x = 1$ $e^x \cos x = \sin x$

۲- ابتدا تعداد و حدود تقریبی ریشه‌های معادلهٔ

$$e^x - 3x^2 = 0$$

را به روش رسم منحنی تعیین کنید. سپس جدول زیر را کامل کنید و مجدداً تعداد ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

x	-1	0	1	2	3	4
e^x-3x^2						

۲-۳ تعیین ریشه‌ها با دقت مطلوب

پس از تعیین حدود یک ریشه لازم است تقریبی از آن را با دقت خواسته شده حساب کنیم. برای این منظور دنباله‌ای از اعداد مانند $\{x_n\}$ می‌سازیم به‌طوری که حد این دنباله ریشهٔ مورد نظر باشد. قبل از بررسی روشهایی که توسط آنها می‌توان این دنباله را ساخت مطالبی‌از دنباله‌ها را یادآوری می‌کنیم (برای اثبات قضایا به کتابهای ریاضی عمومی یا [۱۳] رجوع کنید).

۲-۳-۱ تعریف

دنباله $\{x_n\}$ به α همگراست اگر و فقط اگر

$$\forall_\varepsilon \exists N \forall_n \,(n \geq N \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon)$$

اگر $\{x_n\}$ همگرا نباشد واگرا نامیده می‌شود.

۲ـ۳ـ۲ قضیه

اگر $|k| < ۱$ آن‌گاه، $\lim\limits_{n\to\infty} k^n = ۰$ (k عددی ثابت است).

۲ـ۳ـ۳ قضیه

شرط لازم و کافی برای آنکه دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا باشد آن است که دنباله‌های $\{x_{۲n}\}$ و $\{x_{۲n-۱}\}$ به یک حد همگرا باشند.

قضیهٔ ۲ـ۳ـ۳ معمولاً برای اثبات واگرایی یک دنباله به کار می‌رود.

۲ـ۳ـ۴ قضیه (فشار)

اگر $\{x_n\}$، $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ سه دنباله باشند به قسمی که همواره، $x_n \leq z_n \leq y_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$.

۲ـ۳ـ۵ مثال

الف) حد دنباله $\{x_n\}$ با ضابطهٔ $x_n = \frac{n+۱}{n}$ مساوی یک است. زیرا،

$$|x_n - ۱| = \frac{۱}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} ۰$$

ب) دنبالهٔ $x_n = (-۱)^n$ حد ندارد. زیرا،

$$x_{۲n} = ۱ \qquad \text{و} \qquad x_{۲n-۱} = -۱$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{۲n} = ۱ \neq \lim_{n\to\infty} x_{۲n-۱} = -۱$$

از این رو، بنابر ۲ـ۳ـ۳، دنبالهٔ $\{x_n\}$ حد ندارد.

ج) دنبالهٔ $x_n = \frac{۱ + (-۱)^n}{n}$ حد دارد. زیرا،

$$۰ \leq x_n \leq \frac{۲}{n}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲}{n} = ۰$$

پس، بنابر ۲ـ۳ـ۴، $\{x_n\}$ حد دارد و حد آن نیز صفر است.

۲-۳-۶ تعریف

دنبالهٔ $\{x_n\}$ را صعودی نامیم اگر به ازای هر n،

$$x_n \leq x_{n+1}$$

و آن را نزولی نامیم اگر همواره، $x_{n+1} \leq x_n$. اگر $\{x_n\}$ صعودی یا نزولی باشد آن را یکنوا خوانیم.

۲-۴ روش دوبخشی (یا روش تنصیف)

در این روش فرض می‌کنیم دو عدد a و b موجودند به قسمی که

الف) تابع f در $[a,b]$ پیوسته است

ب) $f(a)f(b) < 0$

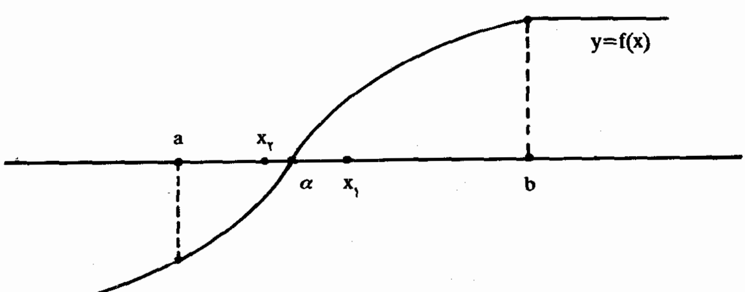
ج) معادلهٔ $f(x) = 0$ تنها یک ریشه در (a,b) دارد (این ریشه را α می‌نامیم).

با مفروضات بالا دنبال $\{x_n\}$ راچنان می‌سازیم که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

برای این منظور، مطابق شکل (۲-۷)، بازهٔ $[a,b]$ را به دو بخش متساوی تقسیم می‌کنیم. یعنی، قرار می‌دهیم

$$x_1 = \frac{a+b}{2} \quad ,$$

به عبارت دیگر، x_1 را وسط بازهٔ $[a,b]$ می‌گیریم تا $[a,b]$ به دو بخش $[a,x_1]$ و $[x_1,b]$ تقسیم شود. با توجه به شرط (ج)، α در یکی از این دو بخش قرار دارد. بخشی که α در آن قرار دارد اختیار و مجدداً آن را به دو بخش متساوی تقسیم و نیمهٔ حاوی α را اختیار می‌کنیم (در شکل (۲-۷)، بازهٔ $[a,x_1]$ را اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$) و این عمل را همین‌طور ادامه می‌دهیم.



شکل ۲-۷

اما، در حالت کلی رسم منحنی میسر نیست و می‌توان برای ادامهٔ کار به طریق جبری زیر عمل کرد:

I. اگر $f(a)f(x_1)<0$ آنگاه ریشه در $[a,x_1]$ است. از این‌رو، می‌توان قرارداد $b=x_1$ و مجدداً عمل را در $[a,b]$ تکرار کرد.

II. اگر $f(a)f(x_1)>0$ آنگاه ریشه در $[x_1,b]$ است، لذا، می‌توان قرارداد $a=x_1$ و مجدداً عمل را در $[a,b]$ تکرار کرد.

III. اگر $f(a)f(x_1)=0$ آنگاه ریشه x_1 است و عمل خاتمه پیدا می‌کند.

به این ترتیب دنباله‌ای چون $\{x_n\}$ ساخته می‌شود. البته عملاً نمی‌توان بی‌نهایت جمله از این دنباله را حساب کرد بلکه باید معیارهایی برای توقف عملیات وجود داشته باشد. اینکه جملات دنبالهٔ بالا تا کجا باید حساب شوند و آیا این دنباله همگراست یا نه را در ۲ـ۴ـ۳ بررسی می‌کنیم.

۲ـ۴ـ۱ مثال

می‌دانیم که معادلهٔ $x+\cos x=0$ فقط یک ریشه در $(-1,0)$ دارد. تقریبی از این ریشه را به روش دوبخشی حساب کنید.

حل: جدول زیر محاسبات مربوط را نشان می‌دهد. (به نحوهٔ درج اعداد در جدول توجه کنید، نمودار جریان این روش در ۲ـ۴ـ۶ آمده است).

در این مثال، $a=-1$ ، $b=0$ ، $f(a)=-0/46\ (2D)$ و $f(b)=1$

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	۱-	۰	۰/۵-	-
۲	۱-	۰/۵-	۰/۷۵-	+
۳	۰/۷۵-	۰/۵-	۰/۶۲۵-	-
۴	۰/۷۵-	۰/۶۲۵-	۰/۶۸۷۵	-
۵	۰/۷۵-	۰/۶۸۷۵-	۰/۷۱۸۷۵-	-
۶	۰/۷۵-	۰/۷۱۸۷۵-	۰/۷۳۴۳۷۵-	+
۷	۰/۷۳۴۳۷۵-	۰/۷۱۸۷۵-	۰/۷۲۶۵۶۲۵-	

توجه کنید که a و b در هر سطر با توجه به سطر قبل و علامت $f(a)f(x_n)$ تعیین می‌شود و همواره $a<b$.

۲ـ۴ـ۲ مثال
تقریبی از یک ریشهٔ معادلهٔ $۳xe^x= ۱$ را تا سه رقم اعشار درست حساب کنید.

حل: معادله فوق را به صورت $f(x)= ۳x-e^{-x}= ۰$ می‌نویسیم. واضح است که ریشه‌های دو معادله یکسان هستند. پس از جدول‌بندی مقادیر f درمی‌یابیم که f در بازهٔ، $(۰/۲۵ , ۰/۲۷)$ تغییر علامت می‌دهد و با توجه به اکیداً صعودی بودن f معادله تنها یک ریشه دارد. جدول زیر تقریبی از ریشه را تا سه رقم اعشار درست به‌دست می‌دهد. در این جدول،

$a= ۰/۲۵$ ، $f(a)= - ۰/۰۲۸۸$ (۴D)

$b= ۰/۲۷$ ، $f(b)= ۰/۴۶۶۲$

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{۲}$	$f(a)f(x_n)$
۱	۰/۲۵	۰/۲۷	۰/۲۶	-
۲	۰/۲۵	۰/۲۶	۰/۲۵۵	+
۳	۰/۲۵۵	۰/۲۶	۰/۲۵۷۵	+
۴	۰/۲۵۷۵	۰/۲۶	۰/۲۵۸۸	-
۵	۰/۲۵۷۵	۰/۲۵۸۸	۰/۲۵۸۲	-
۶	۰/۲۵۷۵	۰/۲۵۸۲	۰/۲۵۷۸۵	

از این‌رو، ریشه تا سه رقم اعشار برابر ۰/۲۵۸ است.

۲ـ۴ـ۳ همگرایی روش دوبخشی
با توجه به نحوهٔ به دست آمدن x_nها به روش دوبخشی داریم (شکل (۲ـ۷) ملاحظه شود):

$$|x_۱ - \alpha| < \frac{b-a}{۲}$$

همچنین با توجه به اینکه طول بازهٔ $[a,x_۱]$ برابر $\frac{b-a}{۲}$ است داریم:

$$|x_۲-\alpha| < \frac{\frac{b-a}{۲}}{۲}=\frac{b-a}{۲^۲}$$

بنابراین، پس از n تکرار، نتیجه می‌شود

$$۰\leq |x_n-\alpha| <\frac{b-a}{۲^n} \qquad (۹.۲)$$

چون $۱>\frac{۱}{۲}>۰$ ، بنابر قضیهٔ ۲.۳.۲، $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۲^n}=۰$ که در نتیجه $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{۲^n}=۰$. پس، بنابر قضیهٔ

۲ـ۳ـ۴،

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$$

که نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

بنابراین، روش دوبخشی همیشه همگراست. یعنی، دنبالهٔ $\{x_n\}$ که به این روش ساخته می‌شود حتماً به α همگراست. ضمناً نامساوی (۹.۲) یک کران بالا برای خطای x_n به‌دست می‌دهد، توجه کنید که این کران بالا، یعنی $\frac{b-a}{2^n}$، قبل از محاسبهٔ x_n قابل محاسبه است. بنابراین، $\frac{b-a}{2^n}$ را یک **کران خطای پیشین** برای x_n می‌نامند. از (۹.۲) سرعت همگرایی $\{x_n\}$ به α را نیز می‌توان پیش‌بینی کرد، این سرعت متناسب با سرعت همگرایی دنبالهٔ $\{\frac{1}{2^n}\}$ به صفر است. با توجه به اینکه $2^{10} \simeq 1000$ داریم

$$\frac{1}{2^{10}} \simeq 0/001 = 10^{-3}$$

بنابراین، بعد از هر ۱۰ تکرار سه رقم به ارقام درست جواب تقریبی اضافه می‌شود، و این نشان می‌دهد که روش دوبخشی کند است و برای تعیین صفرهای توابعی توصیه می‌شود که محاسبهٔ آنها ساده و کم‌خطا باشد.

نامساوی (۹.۲) در تعیین تقریبی که خطای آن از عدد کوچک معلومی کوچکتر باشد نیز به کار می‌رود، به مثال زیر توجه کنید.

۲ـ۴ـ۴ مثال

تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)= x^2 - 2$، یعنی $\alpha = \sqrt{2}$ ، را به روش دوبخشی حساب کنید که برای آن داشته باشیم

$$|x_n - \alpha| < 10^{-2}$$

با توجه به این‌که ریشهٔ معادله در $(1, 2)$ است داریم $b-a= 1$ و

$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

پس، کافی است n را چنان پیدا کنیم که

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-2}$$

اولین n که در نامساوی بالا صدق می‌کند ۷ است. پس، باید تا x_7 حساب کنیم، جدول (۲ـ۸) به همین منظور تنظیم شده است.

$$(a= 1 ، f(a)= -1 ، b= 2 ، f(b)= 2)$$

جدول ۲ـ۸

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	$f(a)f(x_n)$
۱	۱	۲	۱/۵	-
۲	۱	۱/۵	۱/۲۵	+
۳	۱/۲۵	۱/۵	۱/۳۷۵	+
۴	۱/۳۷۵	۱/۵	۱/۴۳۷۵	-
۵	۱/۳۷۵	۱/۴۳۷۵	۱/۴۰۶۲۵	+
۶	۱/۴۰۶۲۵	۱/۴۳۷۵	۱/۴۲۱۸۷۵	-
۷	۱/۴۰۶۲۵	۱/۴۲۱۸۷۵	۱/۴۱۴۰۶۲۵	

۲ـ۴ـ۵ معیارهای توقف

برای توقف محاسبهٔ x_n ها، نه فقط در روش دوبخشی بلکه در روشهایی که بعداً هم معرفی خواهند شد، معیارهایی وجود دارد که در این قسمت بررسی می‌کنیم.

الف) اگر ε عدد مفروض و کوچکی باشد، x_n ها را تا جایی حساب می‌کنیم که $|f(x_n)| < \varepsilon$. یعنی، به محض اینکه $|f(x_n)| < \varepsilon$ عملیات را متوقف می‌کنیم. دلیل این است که $f(\alpha) = ۰$ حال اگر $|f(x_n)|$ خیلی کوچک باشد مثلاً، کوچکتر از $۱۰^{-۷}$، اکثراً می‌توان نتیجه گرفت که x_n خیلی به α نزدیک است.

ب) اگر $|x_n - x_{n-۱}| < \varepsilon$ عملیات را متوقف و x_n را به عنوان تقریبی از α می‌پذیریم. به عبارت دیگر، وقتی اختلاف دو تقریب متوالی بسیار کوچک باشد ادامهٔ روش معقول به نظر نمی‌آید. اگر α بسیار بزرگ یا بسیار کوچک باشد عملیات را وقتی متوقف می‌کنند که $\left|\frac{x_n - x_{n-۱}}{x_{n-۱}}\right| < \varepsilon$ ، در واقع تا حدودی خطای نسبی $x_{n-۱}$ از ε کوچکتر قرار می‌گیرد.

ج) گاهی خواسته می‌شود که عملیات را وقتی متوقف کنیم که خطای مطلق x_n از ε کوچکتر باشد یعنی، وقتی که $|x_n - \alpha| < \varepsilon$. چون مقدار α معلوم نیست از نامساوی (۹.۲) استفاده می‌کنیم و قرار می‌دهیم (مثال ۲ـ۴ـ۴ رانیز ملاحظه کنید):

$$\frac{b-a}{۲^n} \leq \varepsilon \qquad (۱۰.۲)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$۲^n \leq \frac{b-a}{\varepsilon}$$

سپس n را کوچکترین عدد طبیعی اختیار می‌کنیم که در نامساوی زیر صدق کند (از طرفین نامساوی بالا در مبنای ۲ لگاریتم بگیرید).

$$n \geq \log_{۲} \frac{b - a}{\varepsilon}$$

در این صورت، اگر x_n راحساب کنیم خطای مطلق آن از ε کوچکتر خواهد بود زیرا از (۹.۲) و (۱۰.۲) داریم:

$$|x_n - \alpha| < \frac{b - a}{۲^n} \leq \varepsilon$$

که نتیجه می‌دهد،

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon$$

د) گاهی خواسته می‌شود که پس از m تکرار (m معلوم است)، عملیات متوقف و x_m به عنوان تقریبی از α پذیرفته شود.

۲-۴-۵ تبصره

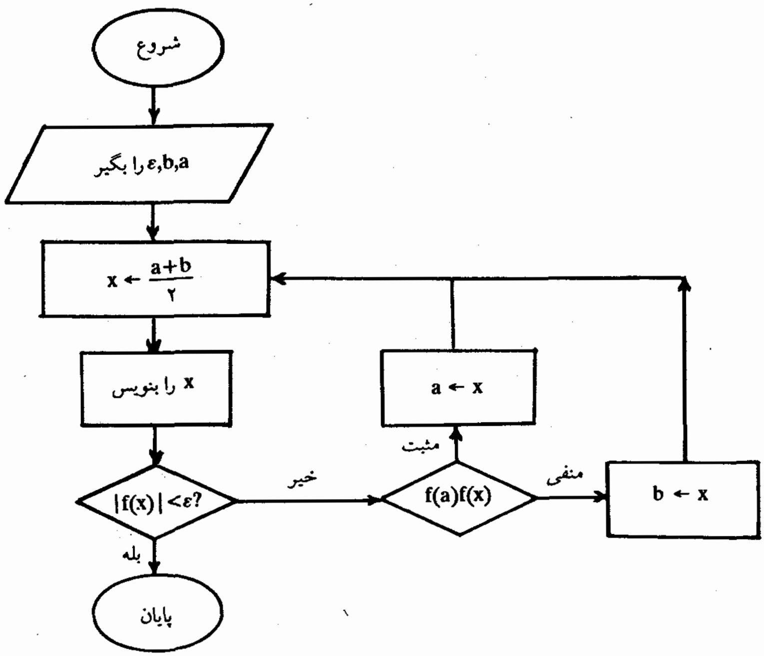
توجه کنید که ε را نباید خیلی کوچک اختیار کرد. مثلاً در دقت معمولی، اگر ε را کوچکتر از $۱۰^{-۷}$ اختیار کنیم ممکن است نامساویهای $|f(x_n)| < \varepsilon$ یا $|x_n - x_{n-۱}| < \varepsilon$ هرگز برقرار نشوند. از این رو، بهتر است تلفیقی از معیار (الف) یا (ب) را با معیار (د) در نظر گرفت. مثلاً، عملیات را وقتی متوقف می‌کنیم که

$$|f(x_n)| < \varepsilon \quad \text{یا} \quad n = m$$

که در آن ε و m دو عدد مفروض هستند.

۲-۴-۶ نمودار جریان روش دوبخشی

با توجه به این‌که روش دوبخشی کند است و لازم است $f(x_n)$ به دفعات زیاد حساب شود معمولاً اجرای دستی این روش، جز برای توابع ساده، امکان‌پذیر نیست. در زیر نمودار جریان و برنامهٔ مربوط به این روش را ارائه می‌کنیم. توجه کنید که برای محاسبهٔ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ لزومی به متغیر اندیسدار نیست.



برنامه زیر برای تعیین ریشهٔ معادلهٔ

$$x + \cos x = ۰$$

نوشته شده است. آن را به ازای $A= -۱$، $B= ۰$ و $EPS= ۱۰^{-۶}$ اجرا کنید.

```
10 CLS
20 INPUT A, B, EPS
30 DEF FNF(X) = X + cos (X)
40 LET X= (A + B)/2 : PRINT X
50 IF ABS (FNF (X) ) < EPS THEN END
60 IF FNF (A) * FNF (X) < ۰ THEN LET B= X
   ELSE LET A=X
70 GOTO 40
80 END
```

در صورتی که بخواهید این برنامه را برای تعیین تقریبی از معادلهٔ دیگری به کار برید کافی

است عبارت ریاضی خط شمارهٔ ۳۰ را تغییر دهید و هنگام اجرای برنامه مقادیر مناسب برای متغیرهای دستور ۲۰ به کامپیوتر بدهید.

۲ـ۴ـ۷ خودآزمایی

۱ـ تقریبی از ریشهٔ معادلات زیر را حساب کنید به‌طوری که $|f(x_n)|<\varepsilon$ (a و b و ε داده شده‌اند).

$$x-\cos x=۰ \quad , \quad a=۰ \quad , \quad b=۱ \quad , \quad \varepsilon=۱۰^{-۳}$$

$$x^{۲}-(۱-x)^{۵}=۰ \quad , \quad a=۰ \quad , \quad b=۱ \quad , \quad \varepsilon=۱۰^{-۲}$$

$$x^{۲}-۳=۰ \quad , \quad a=۱ \quad , \quad b=۲ \quad , \quad \varepsilon=۱۰^{-۳}$$

۲ـ تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلات زیر را حساب کنید که خطای آن از $۱۰^{-۲}$ کمتر باشد (*راهنمایی*: از نامساوی (۹.۲) استفاده کنید).

$$x^{۲}+x-۱=۰ \quad , \quad a=۰ \quad , \quad b=۱$$

$$x^{۳}+x-۱=۰ \quad , \quad a=۰ \quad , \quad b=۱$$

$$\sin x-\frac{x}{۲}=۰ \quad , \quad a=۱ \quad , \quad b=۲$$

۳ـ کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x \sin x=۱$ را تا دو رقم اعشار درست حساب کنید. (*راهنمایی*: با توجه به اینکه کوچکترین ریشهٔ معادله در $(۱, ۱/۵)$ قرار دارد، و طبق تعریف ارقام با معنای درست (۱ـ۷ـ۲)، باید داشته باشیم

$$|x_n-\alpha|\leq ۵\times۱۰^{-۲}$$

یعنی، مسئله مانند مسئلهٔ ۲ است بااین تفاوت که $\varepsilon=۵\times۱۰^{-۲}$

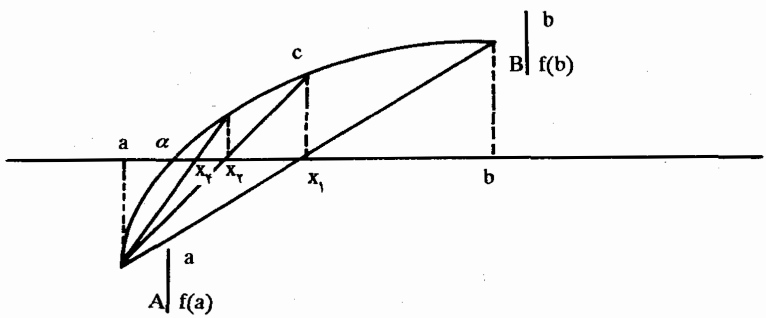
۴ـ نمودار جریان روش دوبخشی را برای حالتی که شرط توقف $n=m$ باشد، بنویسید. (به جای ε عدد طبیعی m را بگیرید).

۲ـ۵ روش نابه‌جایی

روش نابه‌جایی بسیار قدیمی است و مصریان قدیم آن را مورد استفاده قرار داده‌اند. اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\ f(b)<۰$ و معادلهٔ $f(x)=۰$ تنها یک ریشه در (a,b) داشته باشد برای تعیین تقریبی ازاین ریشه، که آن را α می‌نامیم، چنین استدلال می‌شود:

گرچه منحنی نمایش $y=f(x)$ بین دو نقطه A و B یک خط مستقیم نیست اما اگر A و B را با یک خط مستقیم به هم وصل کنیم محل تلاقی آن با محور $x'ox$، نقطه‌ای به طول $x_۱$ را می‌دهد که تقریبی از α است (شکل ۲ـ۹). بعد $x_۲$، $x_۳$ و... را به همین ترتیب، مطابق شکل،

به‌دست می‌آوریم.



شکل ۲ـ۹

برای تعیین مقدار x_1 بر حسب مختصات A و B خط AB را می‌نویسیم و آن رابا محور $x'ox$ قطع می‌دهیم.

معادلهٔ خط AB:

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نقطهٔ تلاقی این خط را با محور $x'ox$ نقطه‌ای به مختصات $(x_1,0)$ می‌گیریم در نتیجه باید داشته باشیم

$$\frac{0-f(a)}{x_1-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

که پس از ساده کردن، فرمول روش نابه‌جایی به‌دست می‌آید

$$x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (۱۱.۲)$$

برای تعیین x_2، تقریباً مشابه روش دوبخشی، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

I. اگر $f(a)f(x_1)<0$ آن‌گاه ریشه در (a,x_1) است. لذا، در فرمول (۱۱.۲) به‌جای b قرار می‌دهیم x_1 (به عبارتی از سه نقطهٔ a و b و x_1، نقطهٔ b نابه‌جاست) و x_2 را حساب می‌کنیم. به عبارت دیگر

$$x_2=\frac{af(x_1)-x_1f(a)}{f(x_1)-f(a)}$$

II. اگر $f(a)f(x_1) > 0$ ریشه در (x_1, b) است و x_2 از فرمول زیر حساب می‌شود

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

III. اگر $f(a)\ f(x_1) = 0$ ریشه x_1 است و مسئله حل شده است.

به این ترتیب باز هم دنباله‌ای از اعداد حاصل می‌شود که چون در بازه‌هایی قرار دارند که طول آنها مرتباً کوچک می‌شود همیشه همگراست. نمودار جریان این روش، بامعیار توقف $|f(x_n)| < \varepsilon$ ، دقیقاً مانند نمودار جریان روش دوبخشی است (۲-۴-۶ را ملاحظه کنید) تنها تفاوت فرمول مربوط به محاسبهٔ x است که چنین است

$$\boxed{x \leftarrow \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}}$$

۲-۵-۱ مثال

تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $3xe^x = 1$ را که در $(0/25\ ,\ 0/27)$ قرار دارد، به روش نابه‌جایی، تا سه رقم اعشار درست حساب کنید.

پس از نوشتن معادلهٔ بالا به شکل $f(x) = 3x - e^{-x} = 0$ داریم (عملیات تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند):

$$x_1 = \frac{0/25 \times 0/0466 - 0/27 \times (-0/0288)}{0/0466 - (-0/0288)} = 0/2577$$

چون، $f(x_1) = 0/0003$ ریشه در $(0/25\ , 0/2577)$ است و

$$x_2 = \frac{0/25 \times 0/0003 - 0/2577 \times (0/0288)}{0/0003 - (0/0288)} = 0/2576$$

بنابراین، ریشه تا سه رقم اعشار درست برابر ۰/۲۵۸ است.

۲-۵-۲ مثال

برای تعیین تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x) = x^2 - 2 = 0$ دو تکرار از روش نابه‌جایی را انجام دهید.

با انتخاب $a = 1$ و $b = 2$ داریم

$$f(a) = -1 \quad , \quad f(b) = 2$$

و

$$x_۱ = \frac{۱\times ۲ - ۲\times(-۱)}{۲-(-۱)} = \frac{۴}{۳}$$

چون، $f(\frac{۴}{۳}) = -\frac{۲}{۹}$ ریشه در $(\frac{۴}{۳}, ۲)$ است. بنابراین،

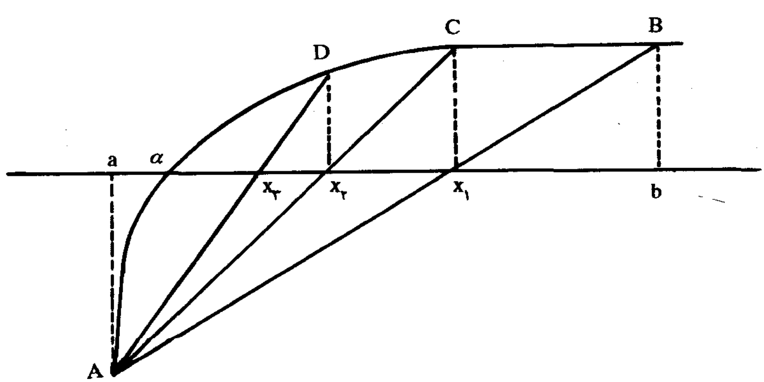
$$x_۲ = \frac{\frac{۴}{۳}\times ۲ - ۲\times\left(-\frac{۲}{۹}\right)}{۲-\left(-\frac{۲}{۹}\right)} = \frac{\frac{۸}{۳}+\frac{۴}{۹}}{۲+\frac{۲}{۹}} = ۱/۴$$

مقدار $x_۲$ را با مقدار نظیر آن که در مثال ۲-۴-۲ به‌دست آوردیم مقایسه کنید. کدام تقریب بهتر است؟ (حتماً می‌دانید که ...$\alpha = \sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲$)

۲-۵-۳ خصوصیات روش نابه‌جایی

روش نابه‌جایی، همانند روش دوبخشی، همگراییِ تضیمن شده دارد و عموماً سریعتر از روش دوبخشی است و جایگزین خوبی برای آن است. البته، عملیات این روش بیش از روش دوبخشی است (دو برابر و نیم). اما، اگر x_i ها جملگی در یک طرف ریشه باشند همگرایی می‌تواند حتی کندتر از روش دوبخشی باشد (شکل (۲-۱۰) را ببینید). شرایط توقف برای این روش نیز یکی از شرایط زیر است

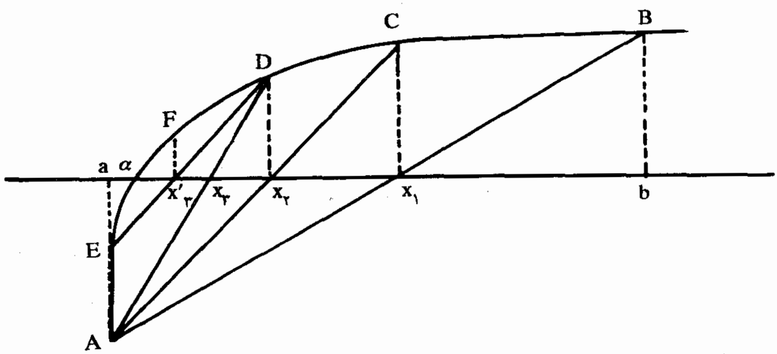
$|f(x_n)| < \varepsilon$ یا $|x_n - x_{n-۱}| < \varepsilon$ یا $n = M$



شکل ۲-۱۰

* ۲ـ۵ـ۴ روش تغییریافته نابه‌جایی

همان‌طور که در شکل (۲ـ۱۰) دیده می‌شود روش نابه‌جایی می‌تواند، گاهی کندتر از روش دوبخشی باشد. برای رفع این اشکال تغییراتی در این روش داده می‌شود تا همگرایی سرعت پیدا کند. در اینجا فقط اشاره‌ای به یکی از این تغییرات می‌کنیم (علاقه‌مندان می‌توانند به [۴]، [۹] یا [۱۹] مراجعه کنند). شکل (۲ـ۱۱).



شکل ۲ـ۱۱

وقتی در دو تکرار متوالی یک نقطه ثابت بماند (در اینجا نقطهٔ A) برای تکرار بعدی به جای اینکه نقطهٔ D به A وصل شود تا x_3 حاصل شود، نقطهٔ D به نقطهٔ E، که عرض آن نصف عرض نقطهٔ A است، وصل می‌شود تا x'_3 به‌دست آید. از شکل واضح است که x'_3 به α نزدیکتر است تا x_3. سپس مجدداً F را به G، وسط Ea، وصل می‌کنیم تا نقطهٔ بعدی حاصل شود.

۲ـ۵ـ۶ خودآزمایی

۱ـ تقریبی از ریشهٔ منفی معادلات زیر را به روش نابه‌جایی چنان حساب کنید که

$|f(x_n)| < 10^{-2}$

$x + \cos x = 0 \quad , \quad x^2 - 2^x = 0 \quad , \quad \sin x - \frac{x}{2} = 0$

۲ـ نمودار جریان روش نابه‌جایی را برای حالتی که شرط خاتمه $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ باشد، بنویسید.

۲ـ۶ روش تکرار ساده (یا نقطهٔ ثابت یا تکرار تابعی)

در این روش معادلهٔ $f(x) = 0$، پس از دستکاریهایی، به صورت

$$x = g(x) \tag{۱۲.۲}$$

نوشته می‌شود به‌طوری که α ریشهٔ هر دو معادله باشد. یعنی

$$f(\alpha) = \circ \quad , \quad \alpha = g(\alpha)$$

(لازم به ذکر است که معمولاً مجموعهٔ ریشه‌های (۱۲.۲) و $f(x) = \circ$ یکسان نیستند بلکه (۱۲.۲) دارای ریشهٔ مورد نظر از $f(x) = \circ$ است.) سپس تقریبی از α چون $x_\circ$، به یکی از روشهای مندرج در بخش ۲.۲، اختیار و دنبالهٔ $\{x_n\}$ به طریق زیر ساخته می‌شود:

$$x_۱ = g(x_\circ)$$

$$x_۲ = g(x_۱)$$

$$x_۳ = g(x_۲)$$

و به‌طور کلی

$$x_{n+۱} = g(x_n), \; n = \circ\; , ۱, ۲, \ldots \tag{۱۳.۲}$$

در مورد دنبالهٔ $\{x_n\}$ سؤالات زیر مطرح است

الف) آیا دنبالهٔ $\{x_n\}$ همواره، یعنی به ازای هر انتخاب $g(x)$ و $x_\circ$، همگراست؟

ب) آیا همگرایی $\{x_n\}$ به انتخاب $g(x)$ بستگی دارد یا $x_\circ$ یا هر دو؟

ج) اگر $\{x_n\}$ همگرا باشد سرعت همگرایی به چه چیزی بستگی دارد؟

د) آیا قبل از محاسبهٔ جملات دنباله، می‌توان همگراییِ آن و سرعت همگراییِ آن را پیش‌بینی کرد؟

بقیهٔ این بخش به پاسخگویی به سؤالات بالا اختصاص دارد.

۲-۶-۱ مثال

معادلهٔ $x^۲ + x - ۱ = \circ$ را به‌صورت $x = g(x)$ بنویسید.

الف) اگر $x^۲ - ۱$ را به سمت راست ببریم خواهیم داشت

$$x = ۱ - x^۲ = g_۱(x).$$

ب) اگر $x-۱$ را به سمت راست ببریم داریم

$$x^۲ = ۱ - x$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$x = \pm\sqrt{۱ - x}$$

اگر ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲ + x - ۱ = \circ$ مورد نظر باشد قرار می‌دهیم

$$x = \sqrt{1-x} = g_2(x).$$

(واضح است که معادلهٔ اخیر فقط یک ریشهٔ مثبت دارد).

پ) معادلهٔ اولیه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x(x+1)=1$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$x = \frac{1}{x+1} = g_3(x)$$

ت) اگر به طرفین معادلهٔ اولیه $x+2$ اضافه کنیم خواهیم داشت

$$x^2 + 2x + 1 = x + 2$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(x+1)^2 = x + 2$$

یا

$$x + 1 = \pm\sqrt{x+2}$$

اگر ریشهٔ مثبت مورد نظر باشد قرار می‌دهیم

$$x = \sqrt{x+2} - 1 = g_4(x).$$

ث) معادلهٔ اولیه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت (طرفین وسطین و ساده کنید)

$$x = \frac{x^2+1}{2x+1} = g_5(x).$$

مثال بالا نشان می‌دهد که نوشتن $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$ به طرق مختلف امکان‌پذیر است. بدیهیترین صورتهای ممکن عبارت‌اند از:

$$x = x - f(x) \quad , \quad x = x + f(x)$$

اکنون برای پاسخگویی به سؤالات مطرح شده، جملات دنباله‌های حاصل از به‌کارگیریِ بعضی از $g(x)$ هایی که در مثال ۲-۶-۱ به‌دست آوردیم را حساب می‌کنیم. قبلاً متذکر می‌شویم که ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + x - 1 = 0$ برابر است با

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0/6180 \ (4D)$$

از این‌رو، فرض می‌کنیم $x_0 = 0/5$ و جدول ذیل را، با گرد کردن اعداد تا چهار رقم اعشار، تشکیل می‌دهیم.

جدول ۲ـ۱۲

x_n	$g_1(x)=1-x^2$	$g_2(x)=\sqrt{1-x}$	$g_3(x)=\frac{1}{1+x}$	$g_5(x)=\frac{x^2+1}{2x+1}$
x_0	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
x_1	۰/۷۵	۰/۷۰۷۱	۰/۶۶۶۷	۰/۶۲۵
x_2	۰/۴۳۷۵	۰/۵۴۱۲	۰/۶	۰/۶۱۸۱
x_3	۰/۸۰۸۶	۰/۶۷۷۴	۰/۶۲۵	۰/۶۱۸۰
x_4	۰/۳۴۶۲	۰/۵۶۸۰	۰/۶۱۵۴	
x_5	۰/۸۸۰۲	۰/۶۵۷۳	۰/۶۱۹۰	
x_6	۰/۲۲۵۲	۰/۵۸۵۴	۰/۶۱۷۶	
x_7	۰/۹۴۹۲	۰/۶۴۳۹	۰/۶۱۸۲	
x_8	۰/۰۹۹۰	۰/۵۹۶۸	۰/۶۱۸۰	
⋮		⋮		
x_{34}		۰/۶۱۸۰		

توضیحات مربوط به جدول ۲ـ۱۲

الف) وقتی $g_1(x)=1-x^2=x$ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ از رابطهٔ زیر حساب می‌شوند

$$x_{n+1}=1-x_n^2$$

مشاهده می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}=1$$

بنابراین، بنابر ۲ـ۳ـ۳، دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نیست. با محاسبه می‌توانید نشان دهید که x_0 هر عددی در $[0,1]$ اختیار شود دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نیست. از این‌رو، همگرایی $\{x_n\}$ به $g(x)$ کاملاً بستگی دارد.

ب) برای $g_2(x)=\sqrt{1-x}=x$ مشاهده می‌شود که همگرایی بسیار کند است. پس از ۳۴ تکرار به تقریب ۰/۶۱۸۰ رسیده‌ایم.

برای همین $g_2(x)$ اگر $x_0=0$ یا $x_0=1$ دنباله‌های زیر حاصل می‌شوند که هر دو واگرا هستند.

$x_0=0$	$x_0=1$
$x_1=1$	$x_1=0$
$x_2=0$	$x_2=1$

$x_3 = 0$

$\vdots$

$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 0$

$x_3 = 1$

$\vdots$

$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 1$

یعنی، با تغییر مقدار اولیه x_0 دنبالهٔ $\{x_n\}$ ممکن است واگرا شود. بنابراین، همگرایی $\{x_n\}$ به انتخاب x_0 نیز بستگی دارد.

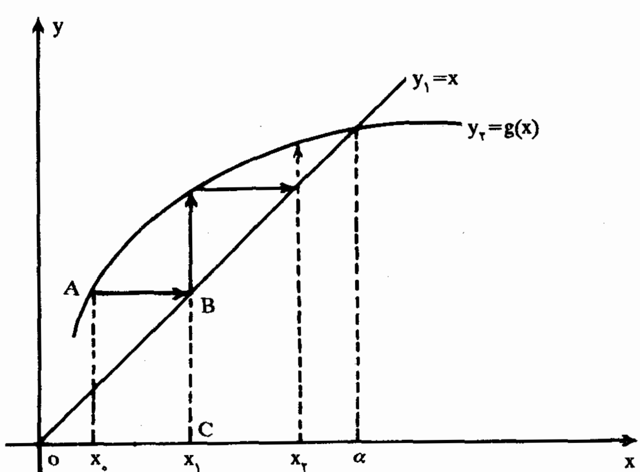
پ) برای $x = \frac{1}{x+1} = g_3(x)$ مشاهده می‌شود که پس از ۸ تکرار به تقریبی با چهار رقم اعشار درست می‌رسیم. در نتیجه، سرعت همگرایی به انتخاب $g(x)$ بستگی دارد. ستون آخر جدول (۲ـ۱۲) نشان می‌دهد که $g_5(x)$ بهترین انتخاب است، پس از سه تکرار به جواب ۰/۶۱۸۰ رسیده‌ایم.

قبل از این‌که خصوصیات یک $g(x)$ مناسب و همچنین محدودهٔ x_0 را تعیین کنیم به تعیین جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به روش هندسی می‌پردازیم و حالات مختلف همگرایی یا واگرایی آن را نشان می‌دهیم.

۲ـ۶ـ۲ تعیین جملات $\{x_n\}$ به روش هندسی

اولاً ریشهٔ $x = g(x)$ طول محل تلاقی منحنیهای زیر است:

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = g(x) \end{cases}$$



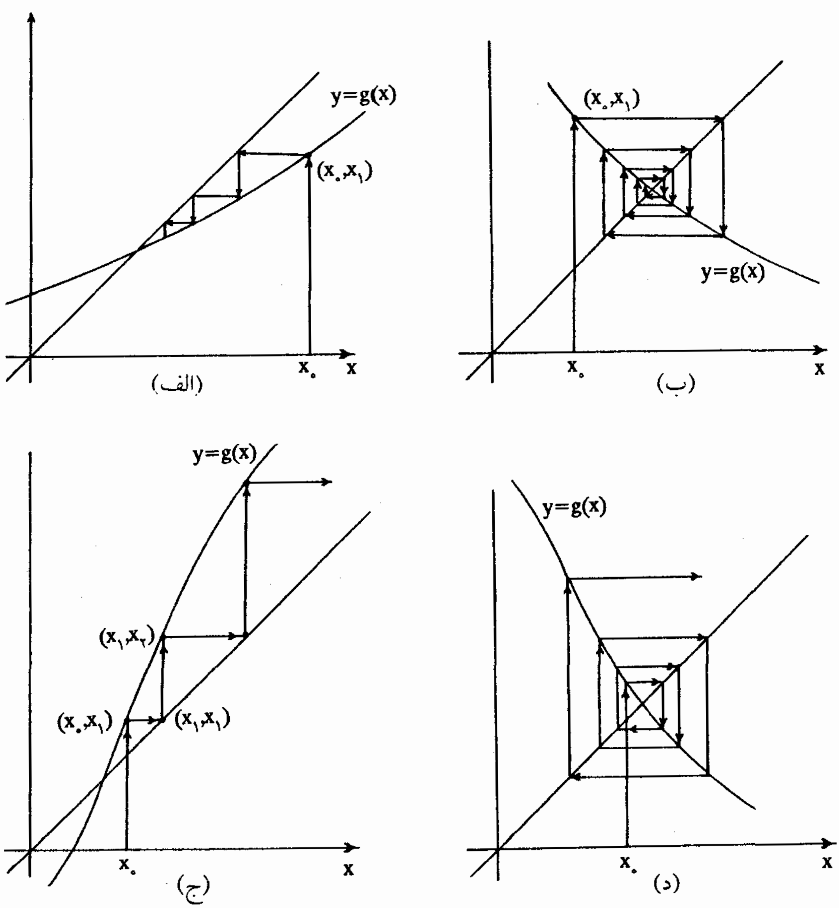
شکل ۲ـ۱۳

اگر x_0 معلوم باشد فاصله A تا محور ox همان $g(x_0)$ (یا x_1) است. بنابراین، اگر از A خطی موازی با محور ox بکشیم تا منحنی $y_1 = x$ (یعنی نیمساز ربع اول و سوم) را در B قطع کند، فاصلهٔ B تا محور ox نیز $g(x_0)$ است. از طرف دیگر، $BC = OC$، زیرا زاویهٔ COB مساوی ۴۵° است. پس،

$$OC = BC = g(x_0) = x_1$$

به همین ترتیب x_2 به‌دست می‌آید (به شکل توجه کنید).

شکلهای زیر حالات مختلف $g(x)$ و x_0 و همگرایی یا واگرایی $\{x_n\}$ را نشان می‌دهند.



شکلهای (الف) و (ب) همگرایی و شکلهای (ج) و (د) واگرایی دنباله $\{x_n\}$ را نشان می‌دهند.

۲-۶-۳ همگرایی روش تکرار ساده

تعیین خصوصیات تابع $g(x)$ و مقدار اولیهٔ x_0 که به ازای آنها $\{x_n\}$ همگرا باشد مستلزم قضیهٔ زیر است که اثبات آن موضوع درس ریاضیات عمومی است.

۲-۶-۴ قضیه

اگر f تابعی بر $[a,b]$ و در هر نقطهٔ (a,b) مشتق داشته باشد ηی از (a,b) هست که

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a).$$

با استفاده از قضیهٔ بالا، ابتدا به ذکر این مطلب می‌پردازیم که چون

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad , \quad \alpha = g(\alpha)$$

بنابر قضیهٔ ۲-۶-۴،

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(\eta_n)(x_n - \alpha)$$

که در آن η_n بین x_n و α است. بنابراین،

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g'(\eta_n)|\,|x_n - \alpha|$$

شرط کافی برای این‌که $|x_n - \alpha| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ آن است که جملات دنبالهٔ $\{|x_n - \alpha|\}$ مرتباً کوچک شوند. یعنی، وقتی که همواره

$$|g'(\eta_n)| \le L < 1$$

اما، چون جای η_n مشخص نیست عملیتر است که شرط بالا را با شرط

$$|g'(x)| \le L < 1 \text{ ،} \alpha$$

در یک همسایگی جایگزین کنیم.

دو قضیه بعد همه چیز را با استدلال روشن می‌کنند.

۲-۶-۵ قضیه

اگر g تابعی بر $[a,b]$ بتوی $[a,b]$ باشد و در این بازه

$$|g'(x)| \le L < 1 \qquad (۱۴.۲)$$

آن‌گاه معادلهٔ $x = g(x)$ تنها یک ریشه دارد، که متعلق به $[a,b]$ است.

برهان

فرض می‌کنیم

$$h(x) = g(x) - x$$

کافی است ثابت کنیم معادلهٔ $h(x) = 0$ فقط یک ریشه دارد. ابتدا ثابت می‌کنیم این معادله ریشه

دارد. چون تابع g در [a,b] مشتق دارد پس پیوسته است. بنابراین، تابع h پیوسته است (چرا؟) ضمناً داریم

$$h(a)= g(a) - a.$$

چون تابع g بر [a,b] بتوی [a,b] است

$$g(a) \in [a,b]$$

که از آن نتیجه می‌شود $a\leq g(a)$، در نتیجه $g(a) - a\geq 0$. پس،

$$h(a)\geq 0 \qquad (۱۵.۲)$$

به طریقی مشابه نتیجه می‌شود که

$$h(b)\leq 0 \qquad (۱۶.۲)$$

حال می‌گوییم اگر $h(a)= 0$ یا $h(b)= 0$، به ترتیب، a یا b ریشهٔ $h(x)= 0$ است. در غیر این صورت:

$$h(a) \neq 0 \quad , \quad h(b) \neq 0$$

پس، بنابر (۱۵.۲) و (۱۶.۲)

$$h(a)\, h(b)< 0$$

اما بنابر قضیه ۲-۲-۸، عددی چون c هست که $a<c<b$ و $h(c)= 0$.

اکنون ثابت می‌کنیم که معادلهٔ $x= g(x)$ بیش از یک ریشه ندارد. این حکم را به طریق برهان خلف ثابت می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم $\alpha \neq \beta$ متعلق به [a,b] باشند و

$$\alpha= g(\alpha) \quad , \quad \beta= g(\beta)$$

در نتیجه، بنابر ۲-۶-۴،

$$\alpha - \beta= g(\alpha) - g(\beta)= g'(\eta)(\alpha - \beta) \text{ , (بین } \alpha \text{ و } \beta\ \eta)$$

چون $\eta\in[a,b]$ داریم $|g'(\eta)|\leq L<1$، در نتیجه

$$|\alpha-\beta| \leq L\, |\alpha-\beta| < |\alpha-\beta|$$

یعنی $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$ که غیرممکن است. با این تناقض فرض خلف باطل است و معادلهٔ $x= g(x)$ فقط یک ریشه دارد.

۲-۶-۶ قضیه

با شرایط قضیهٔ ۲-۶-۵، به ازای هر x_0 از [a,b] دنبالهٔ $\{x_n\}$ با شرط

$$x_{n+1}= g(x_n)$$

به تنها جواب $x= g(x)$ همگراست.

برهان

چون g تابعی بر [a,b] بتوی [a,b] است و $x_0\in[a,b]$ همواره $x_n\in[a,b]$. ضمناً، بنابر قضیهٔ

۲ـ۶ـ۵، $\alpha\in[a,b]$. (α را ریشهٔ $x=g(x)$ فرض کرده‌ایم)،

از این‌رو، بنابر قضیهٔ ۲ـ۶ـ۴، می‌توان نوشت

$$x_{i+1}-\alpha=g(x_i)-g(\alpha)=g'(\eta_i)(x_i-\alpha)$$ (η_i بین α و x_i)

در نتیجه

$$|x_{i+1}-\alpha|=|g'(\eta_i)|\;|x_i-\alpha|$$

چون، $\eta_i\in[a,b]$ داریم $|g'(\eta_i)|\leq L$. پس،

$$|x_{i+1}-\alpha|\leq L\;|x_i-\alpha| \qquad (۱۷.۲)$$

نامساوی (۱۷.۲) را به ازای $i=0,1,\ldots,n-1$ می‌نویسیم

$$\begin{array}{ll}
i=0: & |x_1-\alpha|\leq L|x_0-\alpha| \\
i=1: & |x_2-\alpha|\leq L|x_1-\alpha| \\
i=2: & |x_3-\alpha|\leq L|x_2-\alpha| \\
\vdots & \vdots \\
i=n-2: & |x_{n-1}-\alpha|\leq L\;|x_{n-2}-\alpha| \\
i=n-1: & |x_n-\alpha|\leq L\;|x_{n-1}-\alpha|
\end{array}$$

از ضرب عضو به عضو نامساویهای بالا، و حذف جملات متساوی از طرفین، نتیجه می‌گیریم

$$|x_n-\alpha|\leq L^n\;|x_0-\alpha|$$

چون $0\leq L<1$، بنابر قضیهٔ ۲ـ۳ـ۲،

$$\lim_{n\to\infty}L^n=0$$

و چون همواره $0\leq|x_n-\alpha|$، بنابر قضیهٔ ۲ـ۳ـ۴،

که در نتیجه، $$\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0$$

ضمناً، سرعت همگرایی $\{x_n\}$ به α متناسب با سرعت همگرایی $\{L^n\}$ به صفر است. هرچه L به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی تندتر و هرچه L به یک نزدیکتر باشد کندتر خواهد بود.

مشاهده می‌شود که L نقش تعیین کننده دارد. در عمل برای تشخیص مناسب بودن تابع g، ابتدا $g'(x)$ را به دست می‌آوریم و سعی می‌کنیم یک همسایگی از α پیدا کنیم که در آن شرط

$$|g'(x)|\leq L<1$$

برقرار باشد (توجه کنید که α معلوم نیست، ولی همیشه می‌توان یک همسایگی از α یافت، به ۲ـ۲ رجوع کنید). البته ممکن است نتوان چنین همسایگیی پیدا کرد در این صورت نمی‌توان نتیجه گرفت که دنبالهٔ $\{x_n\}$ واگراست، زیرا شرط فوق یک شرط کافی است؛ توصیه می‌شود که

از $g(x)$ استفاده نشود. ضمناً این شرط که g تابعی بر $[a,b]$ بتوی $[a,b]$ باشد نیز باید تحقیق شود.
مثالهای زیر نحوهٔ تشخیص مناسب بودن g و تعیین L را روشن می‌کنند و نشان می‌دهند که چگونه می‌توان قبل از محاسبهٔ جملات $\{x_n\}$ سرعت همگرایی آن را پیش بینی کرد.

۲ـ۶ـ۷ مثال

برای تعیین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲ + x - ۱ = ۰$ که در بازهٔ $I = [۰/۵ , ۱]$ قراردارد، به روش تکرار ساده، $g(x)$ های زیر را انتخاب می‌کنیم (مثال ۲ـ۶ـ۱ ملاحظه شود). مناسب بودن یا نبودن هریک و بازه‌ای که $x_۰$ می‌تواند از آن انتخاب شود را تعیین کنید.

الف) $g_۱(x) = ۱ - x^۲$

واضح است که $g'_۱(x) = -۲x$ و اگر $x \in I$ آن‌گاه

$$|g'_۱(x)| = ۲x \geq ۱$$

بنابراین، بهتر است از $g_۱(x)$ استفاده نکنیم، در واقع $x_۰$ هر عضو I باشد $\{x_n\}$ واگراست.

ب) $g_۲(x) = \sqrt{۱-x}$

چون $g'_۲(x) = \frac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}$ داریم

$$|g'_۲(x)| = \frac{۱}{۲\sqrt{۱-x}}$$

و اگر x نزدیک ۱ باشد $|g'_۲(x)|$ می‌تواند بسیار بزرگ باشد. آیا $g_۲(x)$ مناسب نیست؟ جدول (۱۲.۲) نشان می‌دهد که $g_۲(x)$ و $x_۰ = ۰/۵$ مناسب هستند. پس باید همسایگی α کمی تنگ‌تر اختیار شود. به تحقیق معلوم می‌شود که (تحقیق کنید)

$$\alpha \in [۰/۵۱, ۰/۷]$$

حال سعی می‌کنیم ثابت کنیم اگر $۰/۵۱ \leq x \leq ۰/۷$ آن‌گاه

$$|g'_۲(x)| = \frac{۱}{۲\sqrt{۱-x}} \leq L < ۱$$

برای این منظور نامساویهای زیر را می‌نویسیم (این روش را برای همیشه الگو قرار دهید)

$$۰/۵۱ \leq x \leq ۰/۷$$
$$-۰/۷ \leq -x \leq -۰/۵۱$$
$$۰/۳ \leq ۱-x \leq ۰/۴۹$$
$$۰/۵۵ \simeq \sqrt{۰/۳} \leq \sqrt{۱-x} \leq \sqrt{۰/۴۹} = ۰/۷$$

از نامساویهای اخیر معلوم می‌شود که $g_۲(x)$ تابعی بر $[۰/۵۱ , ۰/۷]$ بتوی همین بازه است. و نیز

$$|g'_۲(x)| = \frac{۱}{۲\sqrt{۱-x}} \leq \frac{۱}{۲\sqrt{۰/۳}} \simeq ۰/۹۱ < ۱$$

بنابراین، $L = ۰/۹۱$. پس $g_۲(x)$ مناسب است. اما، چون L نزدیک عدد یک است همگرایی کند است. (جدول (۱۲.۲) مؤید این پیشگویی است).

ضمناً، علت اینکه $g_۲(x)$ برای $x_۰ = ۰$ و $x_۰ = ۱$ دنباله‌ای واگرا تولید می‌کند آن است که این دو مقدار اولیه در $(۰/۵۱, ۰/۷)$ نیستند.

ج) $g_۳(x) = \frac{۱}{x+۱}$

در این حالت، $g'_۳(x) = \frac{-۱}{(x+۱)^۲}$ و اگر $x \in [۰/۵۱, ۰/۷]$

$$|g'_۳(x)| = \frac{۱}{(x+۱)^۲} \leq \frac{۱}{(۰/۵+۱)^۲} = \frac{۱}{۲/۲۵} < ۱$$

مشاهده می‌شود که نه فقط $g_۳(x)$ مناسب است بلکه L هم، یعنی $\frac{۱}{۲/۲۵}$ به صفر نزدیکتر است تا به یک، در نتیجه انتظار می‌رود که همگرایی $\{x_n\}$ نسبتاً تند باشد. ضمناً اگر $x \in [۰/۵۱, ۰/۷]$ نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۱/۷} = \frac{۱}{۱+۰/۷} \leq \frac{۱}{۱+x} < \frac{۱}{۱+۰/۵} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین، با توجه به اینکه $۰/۷ > \frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۱/۷} > ۰/۵۱$، داریم: $g_۳(x) = \frac{۱}{۱+x} \in [۰/۵۱, ۰/۷]$. یعنی، $g_۳$ تابعی بر $[۰/۵۱, ۰/۷]$ بتوی همین بازه است.

۲ـ۶ـ۸ مثال

۱ـ برای تعیین تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $۳xe^x = ۱$ از روش تکرار ساده استفاده کنید.

حل: معادله را به شکل $x = \frac{e^{-x}}{۳}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $g(x) = \frac{e^{-x}}{۳}$. به سادگی معلوم است که ریشهٔ معادلهٔ بالا در $(۰, ۱)$ قرار دارد و g تابعی بر $(۰, ۱)$ بتوی $(۰, ۱)$ است. در ضمن

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{۳}$$

و اگر $x \in (۰, ۱)$ داریم

$$|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{۳} < \frac{e^۰}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

در اینجا $L = \frac{۱}{۳}$ که کوچکتر از یک است و $g(x)$ مناسب است. در نتیجه، دنبالهٔ $\{x_n\}$ به ازای هر $x_۰$ از $(۰, ۱)$ همگراست.

با استفاده از $x_۰ = ۰/۵$ و رابطهٔ

$$x_{n+۱} = \frac{e^{-x_n}}{۳}$$

جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به قرار زیر هستند

$x_1= ۰/۲۰۲۲$ (۴ D)
$x_2= ۰/۲۷۲۳$ (۴ D)
$x_3= ۰/۲۵۳۹$ (۴ D)
$x_4= ۰/۲۵۸۶$ (۴ D)
$x_5= ۰/۲۵۷۴$ (۴ D)
$x_6= ۰/۲۵۷۷$ (۴ D)
$x_7= ۰/۲۵۷۶$ (۴ D)
$x_8= ۰/۲۵۷۶$ (۴ D)

لذا، جواب تا چهار رقم اعشار درست ۰/۲۵۷۶ است. اگر $f(x)= ۳xe^x - ۱$ را به ازای x_8 حساب کنید. نتیجه $-۱/۳۴۹۹ \times ۱۰^{-۴}$ خواهد شد که عددی کوچک است.

۲ـ تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $x + \cos x= ۰$، به روش تکرار ساده، چنان حساب کنید که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$.

قرار می‌دهیم

$$x= - \cos x= g(x)$$

می‌دانیم که ریشهٔ معادلهٔ $x + \cos x= ۰$ در $[-۱ , ۰]$ قرار دارد. با توجه به این که تابع کسینوس بر این بازه صعودی است داریم

$$-۱\leq x\leq ۰$$

$$۰/۵۴۱ \simeq \cos (-۱)\leq \cos x\leq ۱$$

بنابراین، $-۱\leq - \cos x\leq -۰/۵۴۱< ۰$

یعنی، $g(x)\in[-۱,۰]$. همچنین داریم $g'(x)= \sin x$ و

$$|g'(x)| = - \sin x= \sin (-x)$$

پس اگر $x\in[-۱,۰]$، با توجه به این‌که $۱ \leq -x \leq ۰$ و تابع سینوس بر بازهٔ $[۰,۱]$ صعودی است داریم

$$۰\leq\sin (-x) \leq \sin ۱\simeq ۰/۸۴۱۵<۱$$

پس، $g(x)$ مناسب است، ولی همگرایی کند است. با فرض $x_0= -۰/۷$ داریم:

$x_1=-۰/۷۶۴۸$ $\quad x_4=-۰/۷۳۱۱$
$x_2=-۰/۷۲۱۵$ $\quad x_5=-۰/۷۴۴۴$
$x_3=-۰/۷۵۰۸$ $\quad |f(x_5)| \simeq ۰/۰۰۸۹۱< ۱۰^{-۲}$.

۲-۶-۹ خودآزمایی

۱-با فرض $x_\circ = ۱$ و انتخاب $g(x)$ مناسب، تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلات زیر را طوری حساب کنید که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۳}$.

$$۲x - \sin x = ۱ \quad , \quad x + \log_e x = \circ$$

$$x^۳ + x - ۱ = \circ \quad , \quad x - \cos x = \circ$$

$$x^۲ - (۱-x)^۵ = \circ$$

۲-شرط برقراری $|g'(x)| \le L < ۱$ در یک همسایگی از ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = \circ$، یک شرط کافی برای همگرایی $\{x_n\}$ است که از $x_{n+۱} = g(x_n)$ حساب می‌شود. برای اثبات اینکه این شرط لازم نیست، فرض کنید.

$$f(x) = ۲x^۲ - x = \circ$$

و قرار دهید $x = ۲x^۲ = g(x)$ و $x_\circ = \frac{۱}{۲}$.

دنبالهٔ $\{x_n\}$ را از $x_{n+۱} = ۲x_n^۲$ حساب کنید، آیا این دنباله همگراست؟

آیا مشتق $g(x)$ در یک همسایگی از $\alpha = \frac{۱}{۲}$ کوچکتر از واحد است؟

۳- فرض کنید $f(x) = e^x - ۳x^۲ = \circ$. می‌دانیم که این معادله سه ریشه در بازه‌های

$$(-۱,\circ) \ , \ (\circ,۱) \ , \ (۳,۴)$$

دارد (به مسئلهٔ ۲ از (۲-۲-۱۱) رجوع کنید). مطلوب است انتخاب $g(x)$ های مناسب جهت محاسبهٔ تقریبی از ریشه‌های این معادله به‌طوری که $|x_{n+۱} - x_n| < ۱۰^{-۳}$.

۴- فرض کنید $f(x) = \circ$ را به‌صورت $x = g(x)$ نوشته‌ایم و در یک همسایگی از α (ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = \circ$) داریم $|g'(x)| \le L < ۱$.

اگر $x_\circ$ نقطه‌ای از همسایگی بالا باشد و $\{x_n\}$ از رابطهٔ $x_{n+۱} = g(x_n)$ حساب شده باشد ثابت کنید:

الف) اگر در همسایگی مذکور $g'(x) > \circ$ آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ یکنواست و

$$|x_{n+۱} - \alpha| \le \frac{L}{۱-L} |x_{n+۱} - x_n|$$

ب) اگر در همسایگی مذکور $g'(x) < \circ$ آن‌گاه جملات متوالی دنباله $\{x_n\}$ در دو طرف α قرار دارند و

$$|x_{n+۱} - \alpha| \le \frac{L}{۱+L} |x_{n+۱} - x_n|$$

(کرانهای بالایی که به این ترتیب برای خطای مطلق $x_{n+۱}$ به‌دست می‌آید **کران خطای پَسین** نامیده می‌شوند، زیرا پس از انجام محاسبات قابل تعیین هستند).

۵ـ با استفاده از مسئلهٔ ۴، تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + x - 1 = 0$ را با فرض $x_0 = 1$ و $g(x) = \frac{1}{x+1}$ حساب کنید که دارای سه رقم با معنای درست باشد.

۲ـ۷ مرتبهٔ همگرایی یک دنباله

تاکنون برای آهنگ همگرایی یک دنباله از کلمات کند و تند یا سریع استفاده کرده‌ایم. اما، به راستی معیاری برای سرعت میل کردن جملات یک دنباله به حد آن وجود دارد؟ در اینجا معیاری موسوم به مرتبهٔ همگرایی تعریف می‌کنیم که توسط آن نه فقط اندازه‌ای برای سرعت همگرایی به‌دست می‌آید بلکه توسط آن می‌توان سرعت همگرایی دنباله‌های متفاوت را با هم مقایسه کرد و در نتیجه دو روش را از این نظر مورد مقایسه قرار داد.

۲ـ۷ـ۱ تعریف

فرض‌کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ به عدد α همگرا باشد و اعداد ثابت، حقیقی و مثبت p و C چنان باشندکه

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} \right| = C$$

در این صورت، p را مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ به α نامند. گاهی گفته می‌شود که روشی که $\{x_n\}$ها از آن به‌دست می‌آیند از مرتبهٔ p است.

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که هرچه p بزرگتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است.

۲ـ۷ـ۲ قضیه

اگر $\{x_n\}$ از روش تکرار ساده به‌دست آمده باشد، و به عدد α که ریشهٔ $x = g(x)$ است همگرا باشد، و $g'(\alpha) \neq 0$ آنگاه مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ یک است.

برهان

باید ثابت کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = C \neq 0$$

برای این منظور از بسط تیلر تابع g در مجاورت α استفاده می‌کنیم

$$g(x_n) = g(\alpha) + (x_n - \alpha) g'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2} g''(\eta_n) \quad (۱۹.۲)$$

که در آن η_n بین x_n و α است.

با توجه به اینکه

$$g(\alpha) = \alpha \quad , \quad g(x_n) = x_{n+1}$$

معادلهٔ (۱۹.۲) را می‌توان چنین نوشت

$$x_{n+1}=\alpha+(x_n-\alpha)\ g'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2}g''(\eta_n) \qquad (20.2)$$

یا

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=g'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)}{2}g''(\eta_n)$$

با توجه به این‌که η_n بین x_n و α است داریم $|\alpha-x_n|\le|\alpha-\eta_n|\le 0$ بنابراین، وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، $|\alpha-x_n|$ به صفر میل می‌کند.

بنابر قضیهٔ ۲ـ۳ـ۴، η_n نیز به α میل می‌کند. بنابراین، با فرض متناهی بودن $g''(\alpha)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-\alpha)}{2}g''(\eta_n)=\frac{0}{2}\times g''(\alpha)=0$$

در نتیجه،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=g'(\alpha)$$

و یا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right|=|g'(\alpha)|$$

چون بنا به‌فرض، $g'(\alpha)\neq 0$ پس، بنابر تعریف ۲ـ۷ـ۱، مرتبهٔ همگرایی روش تکرار ساده یک است. لازم به تذکر است که عدد L، در رابطهٔ (۱۴.۲)، تخمینی از $|g'(\alpha)|$ است. به عبارت دیگر، همگرایی $\{x_n\}$ بستگی به مقدار $|g'(\alpha)|$ دارد هرچه این عدد به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است. یعنی، اگر دو دنباله مرتبهٔ همگرایی یک داشته باشند سرعت آنها بستگی به ثابت c، در تعریف ۲ـ۷ـ۱، دارد.

حال این سؤال مطرح می‌شود که اگر $g'(\alpha)=0$ مرتبهٔ همگرایی چقدر است؟

۲ـ۷ـ۳ قضیه

در صورتی که $g'(\alpha)=0$ مرتبهٔ همگرایی حداقل دو است.

برهان

اگر $g'(\alpha)=0$ معادلهٔ (۲۰.۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$x_{n+1}=\alpha+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2}g''(\eta_n) \qquad (\eta_n \text{ بین } \alpha,x_n)$$

تساوی بالا را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}=\frac{g''(\eta_n)}{2}$$

با توجه به مطالبی که در برهان قضیهٔ ۲ـ۷ـ۲ گفته شد، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g''(\eta_n)}{2}=\frac{g''(\alpha)}{2}$$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}\right|=\frac{|g''(\alpha)|}{2}$$

لذا، اگر $g''(\alpha)\neq 0$ مرتبهٔ همگرایی دو والا بیشتر است.

در بخش بعد روشی را که از مرتبهٔ دو باشد معرفی می‌کنیم. در زیر تعبیر عددی همگرایی مرتبهٔ دو را بیان می‌کنیم.

۲ـ۷ـ۴ تعبیر عددی مرتبهٔ همگرایی

اگر مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ مساوی دو باشد داریم، برای n های نسبتاً بزرگ،

$$|x_{n+1}-\alpha|\simeq c\,|x_n-\alpha|^2$$

که در آن c عددی ثابت و مخالف صفر است. فرض کنید c حدود عدد یک باشد. در این صورت، اگر $|x_1-\alpha|$ حدود ۰/۱ باشد $|x_2-\alpha|$ حدود ۰/۰۱ خواهد بود و بعد $|x_3-\alpha|$ حدود ۰/۰۰۰۱ و بالاخره $|x_4-\alpha|$ حدود 10^{-8} خواهد بود. به عبارت دیگر، ارقام اعشار درست x_n در هر مرحله تقریباً دو برابر مرحله قبل می‌شود (مثال ۲ـ۸ـ۲ ملاحظه شود).

۲ـ۷ـ۵ خودآزمایی

برای تعیین تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2+x-1=0$ قرار می‌دهیم:

$$g_5(x)=\frac{x^2+1}{2x+1}$$

با توجه به اینکه $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ توضیح دهید چرا سرعت همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از $g_5(x)$ حاصل می‌شود بسیار سریع است (به ستون آخر جدول ۱۲.۲ مراجعه کنید).
(*راهنمایی*: ثابت کنید، $g'_5(\alpha)=0$)

۲ـ۸ روش نیوتن ـ رَفسُن

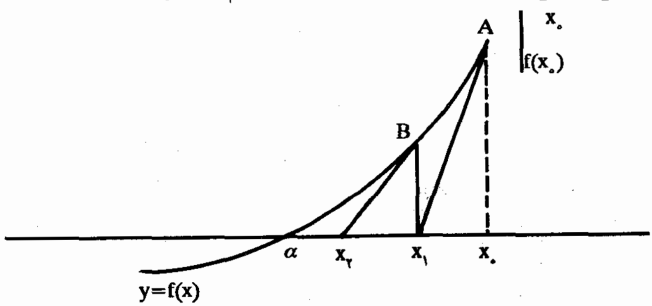
این روش یکی از سریعترین روشهایی است که تاکنون بررسی کرده‌ایم. برای به‌کار بردن این روش باید تخمین نسبتاً نزدیکی از ریشهٔ مورد نظر در دست باشد. از این‌رو، این روش بیشتر برای تصحیح تقریبهای نادقیقی که از روشهای دیگر به‌دست آمده است به‌کار می‌رود. این روش، همان‌طور که در ۲ـ۸ـ۴ نشان داده خواهد شد، حالت خاصی از روش تکرار ساده است و تعمیم آن برای تعیین تقریبی از جوابهای یک دستگاه معادلات غیرخطی ساده است. از این به‌بعد روش نیوتن ـ رَفسُن را به‌طور خلاصه روش نیوتن می‌نامیم.

۲ـ۸ـ۱ فرمول تکرار روش نیوتن

فرمول روش نیوتن را می‌توان به دو طریق به‌دست آورد که در زیر به شرح آنها می‌پردازیم.

طریقهٔ اول

در این طریق از روش هندسی به‌دست آمدن جملات روش نیوتن استفاده می‌شود. در این روش اگر x_0 تقریبی از α باشد، از نقطهٔ A واقع بر منحنی $y= g(x)$ به طول x_0 مماس بر این منحنی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با محور طولها x_1 می‌نامیم، شکل (۲ـ۱۴).



شکل ۲ـ۱۴

بعد این عمل را تکرار می‌کنیم تا به تقریب مطلوب برسیم.

اگر x_0 معلوم باشد، برای به‌دست آوردن x_1 باید معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y= f(x)$ را در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} x_0 \\ f(x_0)\end{matrix}\right.$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور $x'ox$ تعیین کنیم. ضریب زاویهٔ این خط $f'(x_0)$ است. بنابراین،

$$y - f(x_0)= f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{معادلهٔ خط مماس}$$

محل تلاقی این خط با محور طولها را $(x_1, 0)$ می‌گیریم. پس،

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

که اگر $f'(x_0) \neq 0$، نتیجه می‌دهد

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (۲۱.۲)$$

پس به طور کلی می‌توان نوشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (۲۲.۲)$$

فرمول (۲۲.۲) فرمول تکرار روش نیوتن است.

طریقهٔ دوم

در این طریقه فرض می‌کنیم x_0 تقریبی نزدیک به α و h اختلاف آنها باشد، یعنی

$$\alpha = x_0 + h$$

اگر بتوانیم h را به‌دست آوریم آن را به x_0 اضافه می‌کنیم و به α می‌رسیم. با استفاده از بسط تیلر، داریم:

$$0 = f(\alpha) = f\left(x_0 + h\right) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\eta)$$

که در آن η بین α و x_0 است. با توجه به فرض، h کوچک است. از این‌رو، می‌توان از آخرین جملهٔ بسط فوق صرفنظر کرد، یعنی

$$0 \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$$

پس،

$$h \simeq -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

لذا، اگر $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ را به x_0 اضافه کنیم تقریبی از α به‌دست‌می‌آید که آن را x_1 می‌نامیم. یعنی،

$$\cancel{x_1} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

که همان فرمول (۲۱.۲) است.

۲ـ۸ـ۲ مثال

۱ـ a عددی مثبت است. مطلوب است محاسبهٔ تقریبی از $\sqrt{a}$ به روش نیوتن.

واضح است که $\sqrt{a}$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر است

$$f(x)= x^{۲} - a= ۰$$

بنابراین، $f'(x)= ۲x$ و فرمول نیوتن چنین است:

$$x_{n+۱}=x_n - \frac{x_n^{۲} - a}{۲x_n}$$

$$=\frac{x_n^{۲}+a}{۲x_n}$$

این فرمول را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت (که از نظر محاسبه راحت‌تر به‌کار می‌رود)

$$x_{n+۱}=\frac{۱}{۲}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

این فرمول را یونانیان قدیم نیز می‌شناخته و از آن استفاده می‌کرده‌اند.

به عنوان مثال اگر $a=۲$ و $x_۰=۱$ اعداد زیر، که تقریبهایی از $\sqrt{۲}$ هستند، به‌دست می‌آیند.

$$x_۱= ۱/۵$$

$$x_۲= ۱/۴۱\dot{۶}$$

$$x_۳= ۱/۴۱۴۲۱۵۶۸۶ \quad (۹D)$$

$$x_۴= ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ \quad (۹D)$$

در اینجا ویژگی مهم تقریبهایی که به روش نیوتن به‌دست می‌آید به‌خوبی دیده می‌شود. $x_۲$ دارای دو رقم اعشار درست است (در رابطه با بسط $\sqrt{۲}$ که ... ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ است). $x_۳$ دارای چهار رقم اعشار درست است و بالاخره $x_۴$ دارای ۸ رقم اعشار درست است. اگر $\sqrt{۲}$ را از ماشین حساب بگیرید مقدار $x_۴$ را به شما می‌دهد. علت این است که در ماشین حسابها نیز از روش نیوتن برای جذرگیری استفاده می‌شود.

۲ـ تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $x + \cos x= ۰$ را با تقریب اولیه $x_۰= -۰/۷$ حساب کنید.

باتوجه به اینکه

$$f(x)= x+ \cos x$$

داریم

$$f'(x)= ۱ - \sin x$$

و فرمول نیوتن چنین خواهد بود

$$x_{n+۱}=x_n - \frac{x_n+\cos x_n}{۱-\sin x_n}$$

جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به قرار زیرند (توجه کنید که ماشین حساب در وضعیت (MODE) رادیان باشد).

$$x_۱ = -۰/۷۳۹۴۳۶۴۹ \quad (۸D)$$
$$x_۲ = -۰/۷۳۹۰۸۵۱۵ \quad (۸D)$$
$$x_۳ = -۰/۷۳۹۰۸۵۱۳ \quad (۸D)$$

لازم به ذکر است که

$$f(x_۳) = ۵/۳۸۳ \times ۱۰^{-۹}$$

که عدد بسیار کوچکی است و مؤید این‌که $x_۳$ بسیار دقیق است.

۲ـ۸ـ۳ همگرایی روش نیوتن

روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است، زیرا اگر معادلهٔ $f(x) = ۰$ را به صورت

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

بنویسیم و $f(\alpha) = ۰$ آن‌گاه α در معادلهٔ قبلی بالا هم صدق می‌کند. یعنی،

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (۲۳.۲)$$

و فرمول نیوتن عبارت است از، $x_{n+۱} = g(x_n)$ (امتحان کنید).

بنابراین، برای بحث در همگرایی روش نیوتن، باید شرایط همگرایی روش تکرار ساده را با $g(x)$ تعریف شده در (۲۳.۲) بررسی کنیم. برای این منظور $g'(x)$ را حساب می‌کنیم (فرض می‌کنیم تابع f مشتق دوم پیوسته دارد).

$$g'(x) = ۱ - \frac{\left(f'(x)\right)^۲ - f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^۲} = \frac{f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^۲}$$

حال فرض می‌کنیم که (یعنی، α را ریشهٔ ساده فرض می‌کنیم)

$$f'(\alpha) \neq ۰ \qquad (۲۴.۲)$$

در این صورت،

$$g'(\alpha) = ۰$$

چون $g'(x)$ پیوسته است پس به ازای هر ε ، یک همسایگی از α هست به قسمی که به ازای هر x از این همسایگی

$$|g'(x)-g'(\alpha)| = |g'(x)| < \varepsilon$$

بنابراین، اگر ε را عددی کوچکتر از یک فرض کنیم شرط قضیه ۲-۶-۴ برقرار است و اگر x_0 از این همسایگی اختیار شود دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از روش نیوتن حاصل می‌شود همگراست. به‌علاوه، چون $g'(\alpha)=0$، بنابر قضیه ۲-۷-۳، مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ حداقل دو است.

ضمناً، با توجه به قضیهٔ ۲-۷-۳، اگر $g''(\alpha) \neq 0$ مرتبهٔ همگرایی دقیقاً دو است. در اینجا

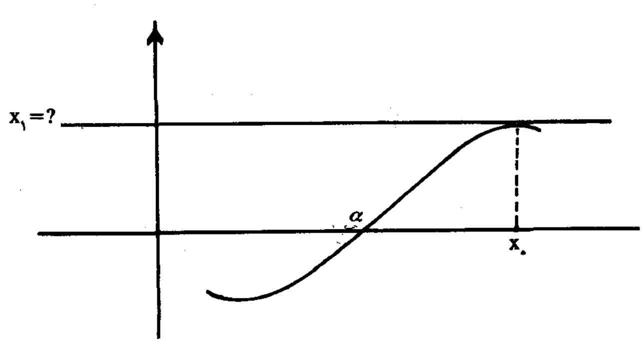
$$g''(\alpha)= \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

(تحقیق کنید)

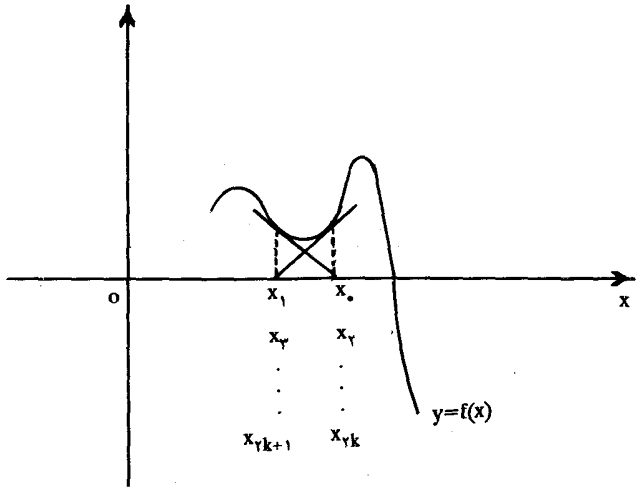
بنابراین، با توجه به (۲۴.۲)، اگر $f'(\alpha)f''(\alpha) \neq 0$ آن‌گاه مرتبهٔ همگرایی روش نیوتن دو است.

۲-۸-۴ خصوصیات روش نیوتن

الف) اشکال اساسی روش نیوتن آن است که، آن همسایگی که در آن $|g'(x)|<1$، ممکن است بسیار کوچک باشد، به‌عبارت دیگر x_0 باید بسیار نزدیک به α باشد تا جملات دنباله حاصل از روش نیوتن به α همگرا باشند. شکلهای زیر واگرایی روش نیوتن و نوسان بین دو نقطه را نشان می‌دهند. برای رفع این مشکل ابتدا، به وسیلهٔ یکی از روشهای همیشه همگرا، تقریبی نزدیک به α به‌دست می‌آورند و بعد این تقریب را x_0 می‌گیرند و از روش نیوتن استفاده می‌کنند.



شکل ۲-۱۵



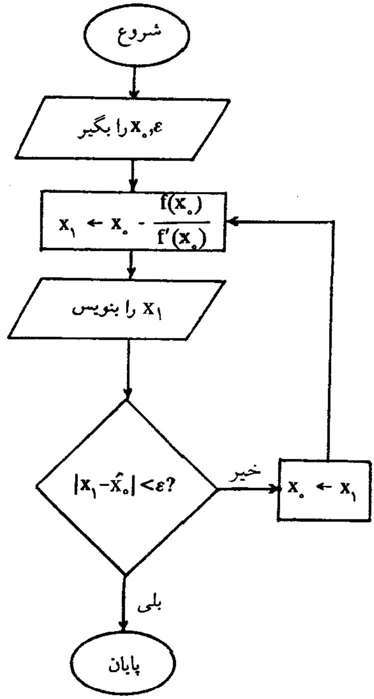
شکل ۲ـ۱۶

ب) اشکال دوم روش نیوتن لزوم موجود بودن $f'(x)$ و محاسبهٔ آن در نقاط x_n است و این که همواره $f'(x_n) \neq \circ$. گاهی تابع f مشتق ندارد، که در نتیجه امکان استفاده از فرمول نیوتن نخواهد بود، و یا شکل $f'(x)$ و محاسبهٔ آن پیچیده است. رفع این مشکل را در ۲ـ۱۰ بررسی می‌کنیم.

ج) مزیت عمدهٔ روش نیوتن، در صورت همگرایی، سرعت سریع آن است که جذابیت و کاربرد آن را فزونی بخشیده است.

۲ـ۸ـ۵ نمودار گردشی روش نیوتن

نمودار گردشی زیر، با توجه به شرط خاتمهٔ $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ، با داشتن $x_\circ$ و ε رسم شده است، توجه کنید که برای تولید جملات از متغیر اندیسدار استفاده نشده و تنها چند متغیر ساده به‌کار رفته است. در نمودار گردشی زیر و برنامهٔ مربوط به آن تابع $f(x)$ و مشتق آن $f'(x)$ دانسته فرض شده‌اند.



نمودار گردشی روش نیوتن

برنامه زیر معادل بیسیک نمودار گردشی روش نیوتن است.

```
10 REM * NEWTON METHOD *
15 DEF FNF (X)= F عبارت مربوط به تابع
20 DEF FND (X)= F عبارت مربوط به مشتق تابع
25 INPUT EPSILON, X0
30 LET X1=X0 - FNF (X0)/FND(X0)
35 PRINT X1
40 IF ABS (X1-X0)>= EPSILON THEN LET X0=X1:GOTO 30
50 END
```

۲ـ۸ـ۶ خودآزمایی

۱ـ فرمول روش نیوتن را برای تعیین ریشهٔ kام عدد حقیقی و مثبت a به‌دست آورید و با استفاده از آن، و x_0 مناسب، تقریبی از اعداد زیر راتا چهار رقم اعشار حساب کنید:

$$\sqrt{3} \quad , \quad \sqrt[3]{4} \quad , \quad \sqrt[4]{5} \quad , \quad \sqrt[7]{9}$$

۲ـ ریشهٔ مثبت معادلات زیر را، با x_0 مناسب و به روش نیوتن، تا چهار رقم اعشار درست حساب کنید.

$$3x e^x - 1 = 0 \quad , \quad \sin x - \frac{x}{2} = 0 \quad , \quad x - \cos x = 0$$

۳ـ معادلهٔ زیر ریشه‌هایی نزدیک به $x=1$ و $x=3$ دارد.

$$x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + \frac{187}{16} = 0$$

با فرض $x_0 = 2/5$ مقادیر x_1 و x_2 را به روش نیوتن حساب و نتیجه را بیان کنید.

۴ـ برای تعیین ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر که $\sqrt{2}$ است! قرار دهید $x_0 = 1$ و به روش نیوتن x_1 تا x_8 را حساب کنید. علت کندی همگرایی چیست؟

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$

همچنین قرار دهید $y_0 = 1$ و جملات دنبالهٔ $\{y_n\}$ را از رابطهٔ زیر حساب کنید.

$$y_{n+1} = y_n - 2\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

آیا همگرایی $\{y_n\}$ سریع و از مرتبهٔ دو است؟

*۲ـ۹ تعیین ریشه‌های تکراری

آنچه تاکنون در مورد همگرایی روش نیوتن گفته‌ایم بر اساس شرط $f'(\alpha) \neq 0$ بوده است. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که اگر این شرط برقرار نباشد، ولی $\{x_n\}$ که از روش نیوتن حاصل می‌شود همگرا باشد، مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ چقدر است؟ قبل از پاسخ به این سؤال یک مثال می‌آوریم.

۲ـ۹ـ۱ مثال

می‌دانیم که $\alpha = 0$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = x - \sin x = 0$ و علاوه بر این‌که $f(0) = 0$ داریم $f'(0) = f''(0) = 0$. یعنی، صفر ریشهٔ تکراری مرتبهٔ ۳ است. با فرض $x_0 = 0/5$ چند جمله از روش نیوتن را حساب کنید.

با توجه به این‌که

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

داریم:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\sin x_n}{1-\cos x_n}$$

و با فرض $x_0=0/5$ جملات به قرار زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_1=0/33197\ (5\,D)$$
$$x_2=0/22091\ (5\,D)$$
$$x_3=0/14717\ (5\,D)$$
$$x_4=0/09817\ (5\,D)$$
$$x_5=0/06547\ (5\,D)$$
$$x_6=0/04364\ (5\,D)$$
$$x_7=0/02909\ (5\,D)$$

ملاحظه می‌شود که سرعت همگرایی بسیار کند است. پس از ۷ تکرار فقط یک رقم اعشار درست از جواب به‌دست آمده‌است. اگر کسر

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

را به ازای n های متفاوت حساب کنیم به‌دست می‌آید:

$$\frac{x_2}{x_1}=0/6655\quad (4D)$$
$$\frac{x_3}{x_2}=0/6662\quad (4D)$$
$$\frac{x_4}{x_3}=0/6671\quad (4D)$$
$$\vdots$$
$$\frac{x_7}{x_6}=0/6666\quad (4D)$$

مشاهده می‌شود که $\frac{x_{n+1}}{x_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{3}$ که در آن ۳ مرتبهٔ $\alpha=0$ است. در قضیهٔ زیر این مطلب را در حالت کلی بررسی می‌کنیم.

۲-۹-۲ قضیه

اگر α یک ریشهٔ $f(x)=0$ باشد و $f'(\alpha)=0$ و m مرتبهٔ تکرار α باشد و دنبالهٔ حاصل از روش نیوتن به α همگرا باشد آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=\frac{m-1}{m}$$

برهان

با توجه به تعریف ۲ـ۲ـ۷ و اینکه $f'(\alpha)=0$ داریم

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \quad \text{و} \quad (g(\alpha)\neq 0,\ m>1) \tag{۲۵.۲}$$

در این صورت، با فرض مشتق‌پذیر بودن f،

$$f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x) \tag{۲۶.۲}$$

از (۲۵.۲) و (۲۶.۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-\alpha)g(x)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)} \tag{۲۷.۲}$$

با استفاده از فرمول روش نیوتن می‌توان نوشت (α را از دو طرف فرمول نیوتن کم می‌کنیم)،

$$x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=(x_n-\alpha)-\frac{(x_n-\alpha)\,g(x_n)}{mg(x_n)+(x_n-\alpha)\,g'(x_n)}$$

$$=(x_n-a)\left[1-\frac{g(x_n)}{mg(x_n)+(x_n-\alpha)\,g'(x_n)}\right]$$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{g(x_n)}{mg(x_n)+(x_n-\alpha)g'(x_n)}\right]$$

$$=1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m}$$

توجه کنید که از $\lim_{n\to\infty}(x_n-\alpha)=0$ و $\lim_{n\to\infty} g(x_n)=g(\alpha)\neq 0$ استفاده شده است.

قضیهٔ ۲ـ۹ـ۲ نشان می‌دهد که وقتی α یک ریشهٔ تکراری است همگرایی روش نیوتن از مرتبهٔ یک است و هرچه مرتبهٔ ریشه بیشتر باشد همگرایی کندتر است (زیرا هرچه m بزرگتر باشد $\frac{m-1}{m}$ به یک نزدیکتر است).

اشکال قضیهٔ ۲ـ۹ـ۲ این است که نمی‌توان m را با استفاده از حکم آن به‌دست آورد، زیرا کسری که حد آن $\frac{m-1}{m}$ است شامل α است. قضیهٔ زیر راهی عملی، و بدون استفاده از α، برای تعیین m به‌دست می‌دهد.

۲ـ۹ـ۳ قضیه

با شرایط ۲ـ۹ـ۲ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{m-1}{m}$$

برهان

سعی می‌کنیم از حکم قضیهٔ ۲ـ۹ـ۲ استفاده کنیم. برای این منظور چنین می‌نویسیم (در صورت و مخرج یک α کم و یک α اضافه می‌کنیم)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1} - \alpha) - (x_n - \alpha)}{(x_n - \alpha) - (x_{n-1} - \alpha)}$$

بعد صورت و مخرج را بر $x_n - \alpha$ تقسیم و از حکم قضیهٔ ۲ـ۹ـ۲ استفاده می‌کنیم

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} - 1}{1 - \frac{x_{n-1}-\alpha}{x_n-\alpha}} = \frac{\frac{m-1}{m} - 1}{1 - \frac{1}{\frac{m-1}{m}}} = \frac{m-1}{m}$$

۲ـ۹ـ۴ مثال

با استفاده از جملات دنبالهٔ مربوط به تعیین ریشهٔ $x - \sin x = 0$، مثال ۲ـ۹ـ۱، مرتبهٔ $\alpha = 0$ را تعیین کنید.

از حکم قضیهٔ ۲ـ۹ـ۳ به این صورت استفاده می‌کنیم که مقدار کسر $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}$ به ازای nهای بزرگ تقریباً با $\frac{m-1}{m}$ برابر است و چون انتظار داریم که m یک عدد طبیعی باشد می‌توان m را به‌دست آورد. مثلاً با قرار دادن $n = 6$ داریم، به مثال ۲ـ۹ـ۱ مراجعه کنید،

$$x_7 = 0/02909 \text{ و } x_6 = 0/04364 \text{ و } x_5 = 0/06547$$

و از اینجا،

$$\frac{x_7 - x_6}{x_6 - x_5} = \frac{-0/01455}{-0/02183} = 0/6665 \simeq \frac{m-1}{m}$$

که از آن،

$$m \simeq 2/9985\ (4\ D)$$

چون m یک عدد طبیعی است پس، $m = 3$.

با تعیین m به روش عددی مندرج در قضیهٔ ۲ـ۹ـ۳، می‌توان روشی از مرتبهٔ حداقل دو به‌دست آورد که **روش نیوتن تغییر یافته** نامیده می‌شود.

۲ـ۹ـ۵ قضیه

اگر α ریشهٔ تکراری مرتبهٔ m از $f(x)=0$ باشد و y_0 به اندازهٔ کافی به α نزدیک باشد دنبالهٔ $\{y_n\}$ که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید همگرایی حداقل ازمرتبهٔ دو خواهد داشت.

$$y_{n+1}=y_n-m\frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \tag{۲۸.۲}$$

برهان

با توجه به (۲۷.۲) داریم

$$\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}=\frac{(y_n-\alpha)\,g(y_n)}{mg(y_n)+(y_n-\alpha)\,g'(y_n)}$$

بنابراین، با توجه به (۲۸.۲)

$$\begin{aligned}y_{n+1}-\alpha&=(y_n-\alpha)-m\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}\\&=\frac{m(y_n-\alpha)\,g(y_n)+(y_n-\alpha)^2g'(y_n)-m(y_n-\alpha)\,g(y_n)}{mg(y_n)+(y_n-\alpha)\,g'(y_n)}\\&=\frac{(y_n-\alpha)^2g'(y_n)}{mg(y_n)+(y_n-\alpha)\,g'(y_n)}\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود، با توجه به همگرایی $\{y_n\}$،

$$\frac{y_{n+1}-\alpha}{(y_n-\alpha)^2}=\frac{g'(y_n)}{mg(y_n)+(y_n-\alpha)\,g'(y_n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g'(\alpha)}{mg(\alpha)}$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که اگر $g'(\alpha)\neq 0$ مرتبهٔ همگرایی $\{y_n\}$ دو والا بیشتر است.

قضایای ۲ـ۹ـ۳ و ۲ـ۹ـ۵ روش عملی برای به‌دست آوردن ریشه‌های تکراری $f(x)=0$ به‌دست می‌دهند.

۲ـ۹ـ۶ مثال

در مثال ۲ـ۹ـ۴ معلوم شد که $\alpha=0$ ریشهٔ تکراری مرتبهٔ ۳ از معادلهٔ $f(x)=x-\sin x=0$ است، با فرض $y_0=0/5$ جملات دنبالهٔ $\{y_n\}$ را از رابطهٔ زیر به‌دست آورید.

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=y_n-m\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}\\&=y_n-3\frac{y_n-\sin y_n}{1-\cos y_n}\end{aligned}$$

جملات دنبالهٔ $\{y_n\}$ عبارت‌اند از:

$y_1= -0/004013\ (4\ S)$

$y_2= 5/38770 \times 10^{-7}$

مشاهده می‌شود که پس از فقط دو تکرار به جوابی تقریبی رسیده‌ایم که بسیار به $\alpha=0$ نزدیک است! اگر بخواهید y_3 را تعیین کنید هم صورت و هم مخرج کسر $\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ صفر می‌شود و در نتیجه y_3 قابل محاسبه نخواهد بود. با توجه به این که α ریشهٔ مرتبهٔ $m-1$ از معادلهٔ $f'(x)=0$ است معمولاً روش بالا دارای این اشکال است که وقتی y_n خیلی نزدیک به α باشد مقدار $f'(y_n)$ چنان کوچک می‌شود که کسر $\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ یا قابل محاسبه نیست و یا با خطای بالا محاسبه می‌شود. روشی که در قضیهٔ زیر ارائه می‌شود این اشکال راندارد.

۲ـ۹ـ۷ قضیه

اگر α ریشهٔ مرتبهٔ $m>1$ از معادلهٔ $f(x)=0$ باشد آن‌گاه α ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $f^{(m-1)}(x)=0$ است و بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از رابطهٔ

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f^{(m-1)}(x_n)}{f^{(m)}(x_n)} \qquad (29.2)$$

حاصل می‌شود، در صورت همگرا بودن، همگرایی آن حداقل از مرتبهٔ دو است.

برهان

با توجه به تعریف ریشهٔ مرتبهٔ m از $f(x)=0$ داریم

$f(\alpha)= \dots = f^{(m-1)}(\alpha)=0$ و $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$

از این‌رو، اگر قرار دهیم $F(x)= f^{(m-1)}(x)$ آن‌گاه α ریشهٔ مرتبهٔ یک از معادلهٔ زیر است

$F(x)= 0$

در نتیجه، بنابر ۲ـ۸ـ۴، همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از $x_{n+1}= x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ حاصل می‌شود حداقل از مرتبهٔ دو است. اما فرمول اخیر همان (۲۹.۲) است.

۲ـ۹ـ۸ مثال

می‌دانیم که $\alpha=0$ ریشهٔ مرتبهٔ سوم از معادلهٔ $x-\sin x=0$ است. با فرض $x_0=0/5$ و با استفاده از (۲۹.۲) جملات $\{x_n\}$ را حساب کنید.

معادلهٔ (۲۹.۲)، با فرض $m=3$، چنین است:

$f(x)= x - \sin x$ و $f'(x)= 1 - \cos x$

$$f''(x)= \sin x= f^{(m-۱)}(x) \quad و \quad f'''(x)= \cos x= f^{(m)}(x)$$

در نتیجه

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{\sin x_n}{\cos x_n}=x_n-\operatorname{tg} x_n$$

$$x_۰=۰/۵$$
$$x_۱=-۰/۰۴۶۳۰ \quad (۴S)$$
$$x_۲=۰/۰۰۰۰۳۳۱۲ \quad (۴S)$$
$$x_۳=-۱/۲\times ۱۰^{-۱۴}$$

مشاهده می‌شود که پس از سه تکرار جوابی بسیار نزدیک صفر حاصل می‌شود.

روشهای دیگری هم برای تعیین ریشه‌های تکراری یک معادله وجود دارد که در مسائل انتهای این بخش ارائه خواهیم کرد.

۲ـ۹ـ۹ خودآزمایی

۱ـ معادلهٔ زیر مفروض است. ثابت‌کنید $\alpha=۰$ ریشهٔ مرتبهٔ ۴ این معادله است.

$$x^۲+۲\cos x-۱=۰ \qquad (۳۰.۲)$$

۲ـ برای تعیین ریشهٔ تکراری معادلهٔ (۳۰.۲) یک بار قرار دهید $y_۰=۰/۵$ و از (۲۸.۲) چند جمله از $\{y_n\}$ را حساب کنید. بار دیگر قرار دهید $x_۰=۰/۵$ و از (۲۹.۲) چند جمله را حساب کنید. کدام روش اشکال کمتری دارد؟

۳ـ فرض کنید α ریشهٔ تکراری مرتبهٔ $m>۱$ از معادلهٔ $f(x)=۰$ باشد. قرار دهید

$$h(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

نشان دهید که $h(\alpha)=۰$ ولی $h'(\alpha)\neq ۰$ و نتیجه بگیرید که همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

به‌دست می‌آید، در صورت همگرا بودن حداقل از مرتبهٔ دو است.

۴ـ اگر α ریشهٔ مرتبهٔ m از معادلهٔ $f(x)=۰$ باشد نشان دهید که α ریشهٔ مرتبهٔ $۲m-۱$ از معادلهٔ زیر است

$$h(x)=f(x+f(x))-f(x)$$

و در نتیجه α ریشهٔ سادهٔ معادله $r(x)=\dfrac{f^۲(x)}{h(x)}$ است. اشکالات پیاده کردن روش نیوتن را روی

تابع $r(x)$، برای تعیین α، بیان کنید.

۲ـ۱۰ روش وتری (یا خط قاطع)

در ۲ـ۸ـ۵ مشاهده شد که یکی از اشکالات روش نیوتن نیاز آن به وجود مشتق تابع f و محاسبهٔ آن در نقاط x_n است. در روش وتری از مشتق تابع استفاده نمی‌شود و همگرایی نسبتاً تند، در مقایسه با روشهای دوبخشی، نابه‌جایی و تکرار ساده دارد.

۲ـ۱۰ـ۱ فرمول روش وتری

می‌دانیم که

$$\lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

بنابراین، اگر x مقداری نزدیک به x_n داشته باشد، مثلاً x_{n-1}، آن‌گاه

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \simeq f'(x_n) \tag{۳۱.۲}$$

از این‌رو، در فرمول نیوتن به‌جای $f'(x_n)$ از رابطهٔ (۳۱.۲) استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

و یا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - (f x_{n-1})} \tag{۳۲.۲}$$

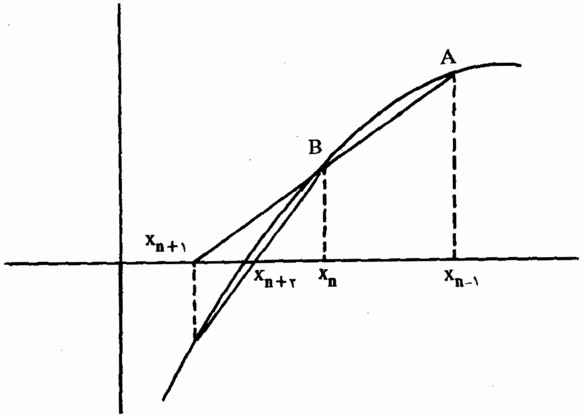
اگر فرمول (۳۲.۲) را ساده کنیم حاصل می‌شود:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{۳۳.۲}$$

فرمول (۳۲.۲) یا (۳۳.۲) فرمول روش وتری است. برای محاسبهٔ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به روش وتری نیاز به دو مقدار اولیهٔ x_0 و x_1 داریم و باید از فرمول (۳۲.۲) بقیهٔ x_n ها را حساب کنیم، زیرا فرمول (۳۳.۲) از نظر محاسباتی ناپایدار است. علت اینکه این روش را روش وتری نامیده‌ایم آن است که x_{n+1} از محل برخورد خطی که نقاط

$$A\left|\begin{matrix} x_{n-1} \\ f(x_{n-1}) \end{matrix}\right. \quad , \quad B\left|\begin{matrix} x_n \\ f(x_n) \end{matrix}\right.$$

را به هم وصل می‌کند، بامحور x حاصل می‌شود، شکل (۲ـ۱۷).



۲ـ۱۷

شکل (۲ـ۱۷) نشان می‌دهد که روش وتری ممکن است همگرا نباشد. مثلاً اگر خط AB موازی محور x باشد و یا آن را در دوردست قطع کند، جایی که احتمالاً جزء حوزهٔ تعریف f نیست، x_{n+1} یا قابل محاسبه نیست و یا مفید نیست. ثابت می‌شود که اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$، که از (۳۲.۲) به‌دست می‌آید، همگرا باشد، همگرایی آن از مرتبهٔ $p=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\simeq 1/618$ است (به [۲] رجوع کنید). بنابراین، این روش سرعتی کندتر از نیوتن ولی به‌مراتب سریعتر از دوبخشی و نابه‌جایی دارد.

۲ـ۱۰ـ۲ خودآزمایی

۱ـ ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$2 \sin x + x - 2 = 0$$

را تا سه رقم اعشار درست به روش وتری حساب کنید (قرار دهید $x_0 = 0/5$ و $x_1 = 1$).

۲ـ نتایج حاصل از به‌کارگیری روشهای دوبخشی، نابه‌جایی و وتری را، با مقادیر آغازین $x_0=0/7$ و $x_1 = 0/9$، برای تعیین تقریبی از یک ریشه معادلهٔ زیر که در $(0/7 , 0/9)$ قرار دارد مقایسه کنید:

$$3 \sin x = x + \frac{1}{x}$$

۳ـ کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$\cos x - xe^x = 0$$

را به روش وتری به ازای $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ طوری حساب کنید که داشته باشیم

$$|f(x_n)| < 10^{-5}$$

۴ـ کوچکترین ریشهٔ معادلهٔ

$$\operatorname{tg} x - \cos x = \frac{1}{2}$$

را به روش وتری، به ازای $x_0 = 0/5$ و $x_1 = 1$، طوری حساب کنید که

$$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-5}$$

۵ـ روشهای وتری و نابه‌جایی را از نظر هندسی و شروع، مقایسه کنید و اختلافهای آنها را توضیح دهید.

* ۲ـ۱۱ حل دستگاه معادلات غیرخطی

بررسی روشهای حل دستگاه معادلات غیرخطی نیاز به فصل جداگانه‌ای دارد. در این بخش تنها روش نیوتن را، آن هم برای دستگاههای غیرخطی شامل دو معادله و دو مجهول، برای حل دستگاههای معادلات غیرخطی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲ـ۱۱ـ۱ تعمیم روش نیوتن

فرض کنید هدف تعیین یکی از جوابهای دستگاه زیر باشد

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

اگر (α, β) جواب این دستگاه و (x_0, y_0) تقریبی از آن باشد می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \alpha = x_0 + h_0 \\ \beta = y_0 + k_0 \end{cases} \tag{۳۴.۲}$$

اگر بتوان h_0 و k_0 را محاسبه کرد با اضافه کردن آنها، به ترتیب، به x_0 و y_0 به جواب مطلوب می‌رسیم. سعی می‌کنیم تقریبهایی از h_0 و k_0 حساب کنیم. برای این منظور از بسط تیلر یک تابع دو متغیره استفاده می‌کنیم.

$$0 = f(\alpha, \beta) = f\left(x_0 + h_0, y_0 + k_0\right) = f(x_0, y_0) + h_0 \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ k_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h_0^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{k_0^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

اگر x_0 و y_0 تقریبهای خوبی از α و β باشند h_0 و k_0 کوچک خواهند بود و می‌توان از جملاتی که

توان $h_\circ$ و $k_\circ$ در آنها بیش از یک است یا حاصلضرب آنها، صرفنظر کرد و نوشت

$$\circ \simeq f(x_\circ, y_\circ) + h_\circ \frac{\partial f}{\partial x} + k_\circ \frac{\partial f}{\partial y}$$

و به همین ترتیب برای تابع g به‌دست می‌آید

$$\circ \simeq g(x_\circ, y_\circ) + h_\circ \frac{\partial g}{\partial x} + k_\circ \frac{\partial g}{\partial y}$$

برای پیدا کردن تقریبهایی از $h_\circ$ و $k_\circ$ دستگاه زیر را از دو رابطهٔ بالا تشکیل می‌هیم

$$\begin{cases} h_\circ \dfrac{\partial f}{\partial x} + k_\circ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -f(x_\circ, y_\circ) \\ h_\circ \dfrac{\partial g}{\partial x} + k_\circ \dfrac{\partial g}{\partial y} = -g(x_\circ, y_\circ) \end{cases} \qquad (۳۵.۲)$$

دستگاه بالا وقتی برای مجهولات $h_\circ$ و $k_\circ$ جواب دارد که

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(x_\circ, y_\circ)} \neq \circ$$

چون جواب (۳۵.۲) تقریبی از $h_\circ$ و $k_\circ$ می‌دهد $x_\circ + h_\circ$ تقریبی بهتر از $x_\circ$ برای α و $y_\circ + k_\circ$ تقریب بهتری برای β خواهد بود. در نتیجه، قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} x_1 = x_\circ + h_\circ \\ y_1 = y_\circ + k_\circ \end{cases}$$

در حالت کلی اگر x_n و y_n حساب شده باشند با حل دستگاه

$$\begin{cases} h_n \dfrac{\partial f}{\partial x} + k_n \dfrac{\partial f}{\partial y} = -f(x_n, y_n) \\ h_n \dfrac{\partial g}{\partial x} + k_n \dfrac{\partial g}{\partial y} = -g(x_n, y_n) \end{cases} \qquad (۳۶.۲)$$

و به دست آوردن h_n و k_n قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + k_n \end{cases}$$

واضح است که دستگاه (۳۶.۲) وقتی جواب دارد که

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(x_n, y_n)} \neq \circ \qquad (۳۷.۲)$$

معمولاً برای برقراری (۳۷.۲) در نقاط (x_n, y_n)، به ازای n های مختلف، سعی می‌شود که قبل از

محاسبات ثابت شود که در یک همسایگی از (α,β) رابطهٔ زیر برقرار است

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\neq ۰$$

آخرین مطلب در اینجا این است که عملیات تا کی ادامه پیدا می‌کند؟ تلفیقی از شرایط زیر برای خاتمهٔ عملیات به کار می‌رود (ε_i و m معلوم فرض می‌شوند):

$$n=m$$

$$|x_{n+۱}-x_n|<\varepsilon_۱ \quad ,$$

$$|y_{n+۱}-y_n|<\varepsilon_۲ \quad ,$$

$$|f(x_n,y_n)|<\varepsilon_۳ \quad ,$$

$$|g(x_n,y_n)|<\varepsilon_۴ \quad .$$

مثلاً، عملیات را تا وقتی ادامه می‌دهیم که

$$\begin{cases}|x_{n+۱}-x_n|<\varepsilon_۱\\ |y_{n+۱}-y_n|<\varepsilon_۲\end{cases}$$

۲-۱۱-۲ مثال

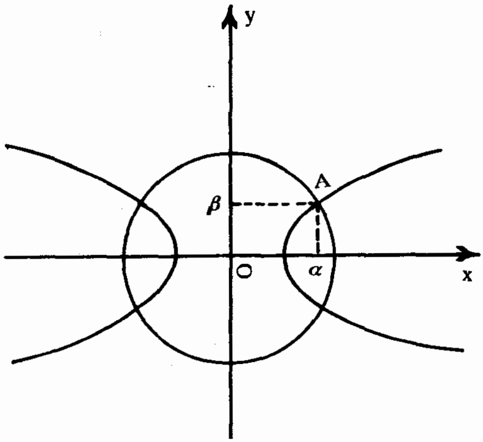
تقریبی از جوابهای دستگاه روبه‌رو را چنان

$$\begin{cases}x^۲-y^۲=۵\\ x^۲+y^۲=۲۵\end{cases}$$

به دست آورید که

$$|x_{n+۱}-x_n|<۱۰^{-۲}\ , \quad |y_{n+۱}-y_n|<۱۰^{-۳}$$

واضح است که می‌توان $x^۲$ را از یک معادله به‌دست آورد و در دیگری گذاشت و y را به‌دست آورد، ولی هدف از این مسئله نشان دادن این نکته است که روش ارائه شده در صفحات قبل کارایی دارد. برای تعیین تقریب اولیه‌ای از یکی از جوابهای دستگاه بالا، منحنیهای $f(x,y)=۰$ و $g(x,y)=۰$ را رسم می‌کنیم (البته این کار همیشه و با دست امکان‌پذیر نیست). طول و عرض محل تلاقی آنها جوابهای مطلوب هستند.



در این مثال

$$f(x,y) = x^{۲} - y^{۲} - ۵$$
$$g(x,y) = x^{۲} + y^{۲} - ۲۵$$

از شکل معلوم است که دستگاه بالا چهار جواب دارد که اگر مختصات جواب واقع در ربع اول را (α,β) بنامیم بقیهٔ جوابها عبارت‌اند از: $(\alpha\ ,\ -\beta)$، $(-\ \alpha\ ,\ \beta)$ و $(-\alpha\ ,\ -\beta)$. ضمناً،

$$x_۰ = ۴ \quad , \quad y_۰ = ۳$$

تقریبهای اولیهٔ مناسبی از α و β هستند.

به‌طور کلی برای محاسبهٔ h_n و k_n ابتدا مشتقات f و g را نسبت به x و y حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۲x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -۲y$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = ۲x \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = ۲y$$

که از آنها نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = ۸xy$$

با توجه به این‌که $۳<\alpha<۴$ و $۳<\beta<۴$ همسایگی $(\alpha\ ,\ \beta)$ را مربع $y\le۴$ و $۳\le x$ می‌گیریم. در این همسایگی از $(\alpha\ ,\ \beta)$ واضح است که

$$۸xy \ge ۷۲ > ۰$$

با توجه به اینکه $x_۰ = ۴$ و $y_۰ = ۳$ داریم، با استفاده از فرمول (۲.۳۶)،

$$\begin{cases} ۲x_n h_n - ۲y_n k_n = -(x_n^۲ - y_n^۲ - ۵) \\ ۲x_n h_n + ۲y_n k_n = -(x_n^۲ + y_n^۲ - ۲۵) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = ۳/۸۷۵۰ & (۵S) \\ y_1 = ۳/۱۶۶۷ & (۵S) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = ۳/۸۷۳۰ & (۵S) \\ y_2 = ۳/۱۶۲۳ & (۵S) \end{cases}$$

اگر x_3 و y_3 را حساب کنید تا ۵ رقم با معنا همان x_2 و y_2 به‌دست می‌آیند. برای مثالهای حل شدهٔ بیشتر به [۳] مراجعه کنید.

۲ـ۱۱ـ۳ خودآزمایی

۱ـ تقریبی از جواب دستگاه روبه‌رو را، با فرض ۴ $=x_0$ و ۳ $=y_0$، چنان پیداکنید که

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = ۵ \\ x^2 + y^2 = ۲۵ \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} |f(x_n, y_n)| < ۱۰^{-۵} \\ |y_{n+1} - y_n| < ۱۰^{-۶} \end{cases}$$

(عملیات میانی را تا هفت رقم اعشار گرد کنید).

۲ـ تقریبی از یک جواب دستگاههای زیر را تا برقراری شرط مشخص شده به‌دست آورید.

الف)
$$\begin{cases} x^2 - y = ۷ \\ ۲x + y^2 = ۹ \end{cases} \qquad |x_{n+1} - x_n| < ۱۰^{-۳}$$

ب)
$$\begin{cases} x^2 + ۲x + y^2 = ۸ \\ x^2 - ۲xy = ۴ \end{cases} \qquad |y_{n+1} - y_n| < ۱۰^{-۴}$$

۲ـ۱۲ تمرینهای تستی

زمان پاسخگویی به هر سؤال دو دقیقه است.

۱ـ معادلهٔ $x^3 + x + ۱ = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۳ ریشهٔ حقیقی ۲) یک ریشهٔ حقیقی ۳) دو ریشهٔ حقیقی ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد

۲ـ معادلهٔ $x^2 = ۲^x$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

۱) دو ریشهٔ مثبت ۲) یک ریشهٔ مثبت ۳) ۳ ریشهٔ مثبت ۴) ریشهٔ مثبت ندارد

۳ـ معادلهٔ $x^3 = \cos x$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشه ۲) دو ریشه ۳) سه ریشه د) بینهایت ریشه

۴ـ معادلهٔ $x = \operatorname{tg} x$ در $(۰, \pi)$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ریشه ۲) یک ریشه ۳) دو ریشه ۴) سه ریشه

۵ـ معادلهٔ $x \cos x = \sin x$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشه ۲) بینهایت ریشه ۳) دو ریشه ۴) سه ریشه

۶ـ معادلهٔ $x^۳ - ۲x^۲ + ۳x + ۷ = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) سه ریشه ۲) یک ریشه ۳) دو ریشه ۴) ریشهٔحقیقی ندارد.

۷ـ معادلهٔ $x^۳ - (۱-x)^۷ = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) یک ریشه ۲) سه ریشه ۳) پنج ریشه ۴) ۷ ریشه

۸ـ کدام روش، در صورت همگرا بودن، از بقیه سریعتر است؟

۱) روش نابه‌جایی ۲)روش‌دوبخشی(تنصیف) ۳) روش نیوتن ۴)روش وتری

۹ـ اگر $x_۰ = ۰/۵$ تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲ + ۱۳x - ۱۰ = ۰$ باشد $x_۱$، به روش نیوتن، تا سه رقم اعشار کدام است؟

۱) ۰/۶۶۷ ۲) ۰/۶۷۱ ۳) ۰/۶۷۲ ۴) ۰/۶۸۳

۱۰ـ اگر α ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ باشد مرتبهٔ همگرایی روش نیوتن، در صورت همگرایی، کدام است؟

۱) دو ۲) یک ۳) حداقل دو ۴) سه

۱۱ـ برای تعیین تقریبی از بزرگترین ریشهٔ منفی معادلهٔ $x - \operatorname{tg} x = ۰$، به روش تکرار ساده، کدام $g(x)$ مناسب است؟

۱) $g(x) = \operatorname{tg} x$ ۲) $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \pi$ ۳) $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

۴) $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \pi$

۱۲ـ اگر یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ در $[a,b]$ و $f(a)f(b) < ۰$ و x_n و $x_{n+۱}$ دو تقریب متوالی از این ریشه به روش دوبخشی (تنصیف) باشد مقدار $|x_{n+۱} - x_n|$ کدام است؟

۱) $\frac{b-a}{۲^{n-۱}}$ ۲) $\frac{b-a}{۲^{n+۱}}$ ۳) $\frac{b-a}{۲^n}$ ۴) $\frac{۳(b-a)}{۲^{n+۱}}$

۱۳ـ فرایند تکرار شوندهٔ $x_{n+۱} = ۳ - ۲ \log_e (۱ + e^{x_n})$، $x_۰ \in [a,b]$ را در نظر بگیرید. بازهٔ $[a,b]$ کدام یک از موارد زیر باشد تا شرط کافی برای همگرایی برقرار باشد؟

۱) $[۰ , \infty)$ ۲) $[۰ , ۱]$ ۳) $[-۱ , ۱]$ ۴) $(۰ , \infty)$

۱۴ـ چندجمله‌ای $P(x) = x^۳ + ۶x^۲ + ۹x$ دارای ریشه‌های ۳- و ۰ است. برای پیداکردن ریشهٔ $x = -۳$ با نقطهٔ شروع مناسب، روش نیوتن دارای نرخ همگرایی از چه مرتبه‌ای است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۰

۱۵ـ روش تکرار شوندهٔ نیوتن برای پیداکردن تقریبی از ریشهٔ k ام $(k > ۱)$ عدد حقیقی $A > ۰$ کدام است؟

۱) $x_{n+1}=kx_n+(k-1)Ax_n^{-k}$ ۲) $x_{n+1}=\frac{k}{k-1}\left(x_n-\frac{A}{x_n^{k-1}}\right)$

۳) $x_{n+1}=\frac{k-1}{k}\left(x_n+\frac{A}{(k-1)x_n^{k-1}}\right)$ ۴) $x_{n+1}=k\left(x_n+\frac{A}{x_n^k}\right)$

۲ـ۱۳ مسائل تکمیلی

این مسائل در کنکورهای کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی آمده‌اند.

۱ـ فرض کنید تابع f بر $[0\,,\,1]$ معین و مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(0)<0<f(1)$ و به ازای هر x از $[0\,,\,1]$، $0<a\le f'(x)\le k$ که درآن a و b اعدادثابتی هستند.نشان‌دهیدعددثابتی‌مانند M وجود داردبه‌طوری‌که روش تکراری

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+Mf(x_n) \\ x_0\in[0\,,1] \end{cases}, \qquad n=0,1,\dots$$

به جواب معادلهٔ $f(x)=0$ همگراست.

۲ـ فرض کنید $k>1$ عددی طبیعی و a عدد حقیقی مثبتی باشد و دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید به عددی غیرصفر همگرا باشد.

$$x_{n+1}=\frac{x_n^k+kax_n}{kx_n^{k-1}+a}\quad,\quad (n\in N)$$

الف) حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به‌دست آورید.

ب) مرتبهٔ همگرایی یک دنبالهٔ دلخواه را تعریف کنید و سپس عدد k را طوری تعیین کنید که همگرایی دنباله بالا حداقل دو باشد.

۳ـ روش تکراری زیر را برای تعیین ریشهٔ $f(x)=0$ در نظر بگیرید.

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{g(x_i)}\quad,\quad g(x_i)=\frac{f(y_i)-f(x_i)}{f(x_i)}$$

$$y_i=x_i+f(x_i)$$

الف) برای $f(x)=x^2-a$ که $a>0$، نشان دهید که روش بالا به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$x_{i+1}=\frac{x_i^3+x_i^2-ax_i+a}{x_i^2+2x_i-a}$$

ب) ثابت کنید که مرتبهٔ همگرایی $\{x_i\}$ حداقل دو است.

۴ـ ثابت کنید اگر $\beta > 4\left(\frac{3}{4e}\right)^{\frac{3}{4}}$ ، دنبالهٔ $\{x_i\}$ که از رابطهٔ $x_{n+1}=\frac{1}{\beta}e^{-x_n^4}$ حاصل می‌شود، به ازای هر $x_0>0$، همگراست.

۵ـ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به α باشد و

$$e_n = x_n - \alpha \neq 0$$

$$e_{n+1} = (b + c_n) e_n \quad , \quad |b| < 1$$

و همواره $|c_n| \leq C$ (C مقدار ثابت مفروض است). چنانچه دنبالهٔ $\{\hat{x}_n\}$ توسط فرایند تکرار شوندهٔ $\hat{x}_n = x_n - \frac{\left(x_{n+1}-x_n\right)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$ تولید شود، نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{x}_n-\alpha}{x_n-\alpha}=0$$

۳

حل معادلات چند جمله‌ای

مقدمه

تعیین ریشه‌های یک معادلهٔ چندجمله‌ای به صورت

$$P(z)= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a= 0 \qquad (۱.۳)$$

که در آن

$$a_n \neq 0 \quad , \quad n\geq 2$$

از دیرباز مورد توجه بوده است. حل مسائل زیادی منجر به پیدا کردن ریشه‌های یک معادلهٔ چندجمله‌ای می‌شود. مثلاً، تعیین مقادیر ویژهٔ یک ماتریس مربع، بیان جملهٔ عمومی دنباله‌هایی که به‌طور بازگشتی تعریف می‌شوند و...

در این فصل مقدمات اجرای روش نیوتن را فراهم می‌کنیم. برای این منظور محاسبهٔ یک چندجمله‌ای و مشتق آن را به‌ازای x دلخواه توضیح خواهیم داد و روشهای خاص چندجمله‌ایها را برای تعیین حدود و تعداد ریشه‌های حقیقی آن شرح می‌دهیم.

هدفهای کلی

۱ـ ارائهٔ نمونه‌ای از مسائل کاربردی که حل آن منجر به حل یک معادلهٔ چندجمله‌ای می‌شود.

۲ـ ارائه روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ (۱.۳)

۳ـ تعیین حدود و تعداد ریشه‌های حقیقی (۱.۳)

۴ـ محاسبهٔ $P(x)$ و $P'(x)$ به ازای $x= a$

۵ـ تعیین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۱.۳) با دقت مطلوب

هدفهای رفتاری

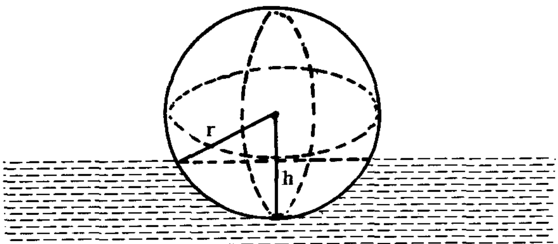
دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱ـ در صورت لزوم از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها استفاده کند

۲ـ حدود و تعداد ریشه‌های حقیقی یک معادله چندجمله‌ای را تعیین کند
۳ـ مقدار یک چندجمله‌ای و مشتق آن را به ازای x دلخواه حساب کند
۴ـ ریشه‌های حقیقی یک معادلهٔ چندجمله‌ای را با دقت مطلوب حساب کند.

۳ـ۱ یک مسئلهٔ کاربردی

فرض کنید جسمی کروی به شعاع r و وزن مخصوص ۰/۶ در آب قرار دارد شکل (۳ـ۱).

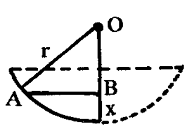


شکل ۳ـ۱

می‌خواهیم ارتفاع قسمتی از کره که در آب قرار دارد، یعنی h، را بر حسب r به‌دست آوریم. طبق قانون ارشمیدس باید داشته باشیم

وزن آب جابه‌جا شده = وزن کره

اما، وزن آب جابه‌جا شده برابر حجم قسمتی از جسم است که در آب قرار دارد. برای محاسبهٔ این حجم اگر قطعهٔ نشان داده شده در شکل (۳ـ۲) را حول محور y دوران دهیم، خواهیم داشت:



$$AB^2 = AO^2 - OB^2 = r^2 - (r - x)^2$$

شکل ۳ـ۲

که در نتیجه،

$$\text{حجم قسمت قرارگرفته در آب} = \int_0^h \pi\left(r^2 - (r-x)^2\right) dx$$

$$= \pi \int_{\circ}^{h} \left(۲rx - x^{۲} \right) dx$$

$$= \pi \left[rx^{۲} - \frac{x^{۳}}{۳} \right]_{\circ}^{h} = \frac{\pi}{۳} \left(۳rh^{۲} - h^{۳} \right)$$

و ضمناً وزن کره برابر است با

$$\circ/۶ \times \frac{۴}{۳} \pi r^{۳}$$

پس باید داشته باشیم

$$\frac{\pi}{۳}\left(۳rh^{۲} - h^{۳} \right) = ۲/۴ \frac{\pi}{۳} r^{۳}$$

که پس از ساده کردن و با فرض $R = \frac{h}{۲}$ به صورت زیر درمی‌آید

$$R^{۳} - ۳R^{۲} + ۲/۴ = \circ$$

بنابراین، تعیین نسبت h به r مستلزم تعیین ریشه‌ای از معادلهٔ بالاست که بین ۰ و ۲ قـرار دارد (زیرا، $\circ < h \leq ۲r$ که در نتیجه $\circ < R \leq ۲$).

۲ـ۳ روابط بین ریشه‌ها و ضرایب یک معادلهٔ چندجمله‌ای

به‌طور کلی یک معادلهٔ چندجمله‌ای درجهٔ n عبارت است از

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-۱} z^{n-۱} + \dots + a_۱ z + a_\circ = \circ \qquad (۲.۳)$$

که در آن $a_n \neq \circ$ و $n \geq ۱$. چون در عمل بیشتر با معادلاتی که ضرایب آنها حقیقی است مواجه می‌شویم فرض می‌کنیم که همواره a_i حقیقی است.

اگر $n = ۱$ جواب (۲.۳) عبارت است از

$$z = -\frac{a_\circ}{a_۱}$$

از این‌رو، فرض می‌کنیم $n \geq ۲$ ضمناً، اگر $a_\circ = \circ$ داریم

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_۱ z = z\left(a_n z^{n-۱} + \dots + a_۱ \right) = \circ$$

که در نتیجه $z = \circ$. به علاوه، اگر $a_k \neq \circ$ و

$$a_\circ = a_۱ = \dots = a_{k-۱} = \circ \quad , \quad (k < n)$$

داریم

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_k z^k$$
$$= z^k \left(a_n z^{n-k} + \dots + a_k \right) = \circ$$

یعنی $z = \circ$ ریشهٔ تکراری مرتبهٔ k خواهد بود و کافی است بقیهٔ ریشه‌ها را از معادلهٔ

$$a_n z^{n-k} + \dots + a_k = 0$$

به‌دست آوریم که در آن $a_k \neq 0$. پس به‌طور کلی فرض می‌کنیم که در معادلهٔ (۲.۳) داریم

$$a_0 \times a_n \neq 0 \qquad (۳.۳)$$

۳-۲-۱ قضیه

معادلهٔ (۲.۳) دارای n ریشهٔ (حقیقی یا موهومی) است و اگر ریشه‌های آن را z_1، z_2، ... و z_n بنامیم داریم

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \qquad (۴.۳)$$

این قضیه در جبر ثابت می‌شود.

ریشه‌ها را می‌توان به ترتیب زیر مرتب کرد، که با توجه به (۳.۳)،

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$$

به علاوه، روابط زیر بین ضرایب و ریشه‌ها برقرارند (این روابط از برابری ضرایب z^{n-1}، z^{n-2} و z^0 در دو طرف (۴.۳) به‌دست می‌آیند):

(آ) $$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

(ب) $$\sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

(پ) $$z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

۳-۲-۲ مثال

اگر $P(z) = 2z^2 + 3z - 2$ آن‌گاه ریشه‌های $P(z) = 0$ عبارت‌اند از: $z_2 = \frac{1}{2}$ و $z_1 = -2$.
و از اینجا، بنابر (۴.۳)،

$$P(z) = 2(z + 2)\left(z - \frac{1}{2}\right)$$

۳-۲-۳ قضیه

اگر z ریشهٔ معادلهٔ (۲.۳) باشد $\frac{1}{z}$ ریشهٔ معادلهٔ زیر است

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (۵.۳)$$

برهان

فرض می‌کنیم z ریشهٔ (۲.۳) باشد، داریم

$$Q\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n$$

$$= \frac{1}{z^n}\left(a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right)$$

چون z ریشهٔ (۲.۳) است مقدار داخل پرانتز صفر است، در نتیجه $Q\left(\frac{1}{z}\right)=0$ و $\frac{1}{z}$ ریشهٔ معادلهٔ (۵.۳) است.

قضیهٔ بالا کاربرد فراوان دارد، بعداً ازاین قضیه در پیشگویی نوع ریشه‌ها و تعیین حدود ریشه‌های یک معادله چند جمله‌ای استفاده خواهیم کرد.

۳ـ۲ـ۴ مثال

ریشه‌های دسته معادلات زیر را حساب کنید

$$\begin{cases} P(z) = z^2 + 2z + 10 = 0 \\ Q(z) = 10z^2 + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

حل: معادلهٔ $P(z)=0$ یک معادلهٔ درجهٔ دوم است. بنابراین،

$$z = -1 \pm \sqrt{1-10}$$

بنابراین، $z_1 = -1 + 3i$ و $z_2 = -1 - 3i$ که در آن $i^2 = -1$.

با توجه به ارتباط بین ضرایب $P(z)$ و $Q(z)$ ریشه‌های $Q(z)$ عبارت‌اند از:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{-1+3i} = \frac{1+3i}{-10} \quad \text{و} \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{-1-3i} = \frac{3i-1}{10}$$

۳ـ۲ـ۵ قضیه

اگر z یک ریشهٔ مختلط معادلهٔ (۲.۳) باشد $\bar{z}$ ، یعنی مزدوج z ، نیز ریشهٔ معادلهٔ (۲.۳) است.

برهان

با توجه به این‌که به ازای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \text{و} \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\overline{(z_1^n)} = (\bar{z}_1)^n \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{z}_i = \overline{\left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right)}$$

داریم:

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0.$$

توجه داشته باشید که اگر ضرایب $P(z)$ حقیقی نباشند حکم قضیهٔ بالا برقرار نیست.

با توجه به قضیهٔ ۳-۲-۵ اگر $z_1 = a + ib$ ریشهٔ (۲.۳) باشد $\bar{z}_1 = a - ib$ نیز ریشهٔ (۲.۳) است. بنابراین، در تجزیهٔ $P(z)$ عامل

$$(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$$

موجود است، این مطلب در تعیین ریشه‌های مختلط (۲.۳) به‌کار می‌رود.

۳-۲-۶ نتیجه

اگر درجهٔ $P(z)$ فرد باشد معادلهٔ $P(z) = 0$ حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

برهان

با توجه به قضیهٔ ۳-۲-۵ تعداد ریشه‌های مختلط (۲.۳) عددی زوج است، مثلاً، $2k$. چون n، یعنی درجهٔ $P(z)$، بنا به‌فرض فرد است پس تعداد ریشه‌های حقیقی $n-2k$ است که عددی فرد و حداقل یک است.

برهان قضیهٔ زیر ساده است، به همین دلیل ارائه آن به دانشجو واگذار می‌شود.

۳-۲-۷ قضیه

اگر z ریشهٔ $P(z) = 0$ باشد $-z$ ریشهٔ $P(-z) = 0$ است.

۳-۲-۸ قضیه

اگر در چندجمله‌ای $P(z)$ تنها توانهای زوج z موجود باشند یعنی

$$P(z) = a_{2k} z^{2k} + a_{2k-2} z^{2k-2} + \dots + a_2 z^2 + a_0$$

تعداد ریشه‌های حقیقی (۲.۳) عددی زوج است (توجه کنید که ممکن است ریشهٔ حقیقی وجود نداشته باشد).

قضیه زیر برای ریشه‌های گویای (۲.۳) به‌کار می‌رود.

۳-۲-۹ قضیه

اگر $a = \frac{r}{s}$، که در آن r و s صحیح و نسبت به هم اول‌اند، ریشهٔ معا

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

باشد و a_0، a_1، ...، a_n جملگی اعداد صحیح باشند آنگاه $r | a_0$ و $s | a_n$. به‌ویژه اگر $|a_n| = 1$

آن‌گاه ریشه‌های حقیقی $P(x)=0$، در صورت وجود، صحیح هستند.

برهان

چون $P(a)=0$ داریم:

$$P(a)=a_n\frac{r^n}{s^n}+a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}}+\dots+a_1\frac{r}{s}+a_0=0$$

با ضرب طرفین در s^n نتیجه می‌شود

$$a_n r^n+a_{n-1}r^{n-1}s+\dots+a_1 r s^{n-1}+a_0 s^n=0$$

بنابراین،

$$a_n r^n+\dots+a_1 r s^{n-1}=-a_0 s^n$$

چون عدد r عبارت سمت چپ تساوی بالا را عاد می‌کند باید $a_0 s^n$ را نیز عاد کند و چون $(r,s)=1$ پس باید $r|a_0$. به همین طریق ثابت می‌شود که $s|a_n$. اگر $|a_n|=1$ در نتیجه $s|\pm1$ که از آن نتیجه می‌شود $s=\pm1$. یعنی $a=\frac{r}{s}$ یک عدد صحیح است.

۳-۲-۱۰ قاعدهٔ علامات دکارت

اگر m تعداد تغییر علامت در جملات متوالی

$$a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \dots\,,\ a_{n-1}\,,\ a_n$$

و k تعداد ریشه‌های مثبت معادلهٔ $P(z)=0$ باشد آن‌گاه $k\le m$ و $m-k$ عددی زوج است.

برهان

به [۱۴] مراجعه کنید.

۳-۲-۱۱ نتیجه

اگر l تعداد تغییر علامت در جملات متوالی ضرایب $P(-z)$ و s تعداد ریشه‌های منفی $P(z)=0$ باشد، در این صورت $s\le l$ و $l-s$ عددی زوج است.

۳-۲-۱۲ مثال

تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ

$$P(z)=z^3-z^2-10z+4=0$$

را، در صورت امکان، به قاعدهٔ علامات دکارت تعیین کنید.

حل: تعداد تغییر علامت در ضرایب $P(z)$ برابر ۲ است از این‌رو، این معادله دارای ۲ یا ۰ ریشهٔ مثبت است. همچنین، $P(-z)= -z^۳ - z^۲ + ۱۰z + ۴$ که تعداد تغییر علامت ضرایب آن یک است. یعنی، معادله حتماً دارای یک ریشهٔ منفی است ولی در مورد ریشه‌های مثبت آن، قاعدهٔ علامات دکارت نتیجه‌ای به‌دست نمی‌دهد!

۳ـ۳ تعیین حدود ریشه‌های $P(z)=۰$

در فصل دوم مشاهده شد که برای تعیین ریشه‌های یک معادله لازم است حدود ریشه‌ها و گاهی تقریب خوبی از آنها به گونه‌ای معین شود. در این قسمت مشاهده خواهید کرد که ریشه‌های (۲.۳) محدود هستند و به‌سادگی کران بالا و پایین برای آنها به‌دست می‌آید.

۳ـ۳ـ۱ قضیه

اگر z ریشهٔ معادلهٔ

$$P(z)= z^n + a_{n-۱} z^{n-۱} + \dots + a_۱ z + a_۰ = ۰$$

باشد (a_i ها حقیقی هستند) آنگاه

$$|z| \le |a_۰| + |a_۱| + \dots + |a_{n-۱}| + ۱ = M \qquad (۶.۳)$$

برهان

می‌گوییم اگر $|z| \le ۱$ حکم بدیهی است زیرا، $۱ \le M$.

اگر $|z| > ۱$ داریم $۱ > \frac{۱}{|z|} = \left|\frac{۱}{z}\right|$ و بنابر قضیه ۳ـ۲ـ۳، $\frac{۱}{z}$ ریشهٔ معادلهٔ زیر است

$$a_۰ z^n + a_۱ z^{n-۱} + \dots + a_{n-۱} z + ۱ = ۰$$

یعنی،

$$a_۰\left(\frac{۱}{z}\right)^n + a_۱\left(\frac{۱}{z}\right)^{n-۱} + \dots + a_{n-۱}\left(\frac{۱}{z}\right) + ۱ =$$

پس،

$$a_۰\left(\frac{۱}{z}\right)^n + a_۱\left(\frac{۱}{z}\right)^{n-۱} + \dots + a_{n-۱}\left(\frac{۱}{z}\right) = -۱$$

از طرفین قدر مطلق می‌گیریم و از نامساویهای زیر نیز استفاده می‌کنیم، چون $\left|\frac{۱}{z}\right| < ۱$،

$$\left|\left(\frac{۱}{z}\right)^k\right| \le \left|\frac{۱}{z}\right| \quad , \quad k = ۱, \dots, n$$

و

$$\left|\sum_{i=۱}^{m} a_i\right| \le \sum_{i=۱}^{m} |a_i|$$

داریم:

$$۱ = \left|a_۰\left(\frac{۱}{z}\right)^n + \dots + a_{n-۱}\left(\frac{۱}{z}\right)\right|$$

پس،

$$1 \le |a_0| \left|\frac{1}{z}\right| + \dots + |a_{n-1}| \left|\frac{1}{z}\right|$$

که با ضرب طرفین در $|z|$ نتیجه می‌دهد

$$|z| \le |a_0| + \dots + |a_{n-1}|$$

چون طرف راست نامساوی بالا از M کوچکتر است حکم قضیه حاصل می‌شود.

۳-۳-۲ نتیجه

اگر z ریشهٔ دلخواهی از معادلهٔ (۲.۳) باشد

$$|z| \le \frac{M'}{|a_n|} \tag{۷.۳}$$

که در آن،

$$M' = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0| \tag{۸.۳}$$

برهان

اگر $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ داریم، چون $a_n \neq 0$،

$$z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

طبق قضیهٔ ۳-۳-۱، اگر z ریشهٔ معادلهٔ بالا باشد داریم:

$$|z| \le \left|\frac{a_0}{a_n}\right| + \dots + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + 1$$

$$= \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|}{|a_n|} = \frac{M'}{|a_n|}$$

در صورتی که بدانیم تمام ریشه‌های معادلهٔ (۲.۳) حقیقی هستند کران بالای بهتری برای ریشه‌ها به‌دست می‌آید.

۳-۳-۳ قضیه

اگر تمام ریشه‌های (۲.۳) حقیقی و ریشه‌ها z_1، z_2، ...، z_n باشند به‌طوری که

$$0 < |z_1| \le \dots \le |z_n|$$

آن‌گاه

$$z_n^2 < \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n} = R \tag{۹.۳}$$

و

$$z_1^2 > \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}} = r$$

برهان

چون z_i ها، بنا به‌فرض، حقیقی و مخالف صفرند همواره $z_i^2 > 0$ و از اینجا

$$z_n^2 < z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = \left(z_1 + z_2 + \dots + z_n\right)^2 - 2\sum_{1 \le i < j \le n} z_i z_j$$

لذا، با توجه به روابط (آ) و (ب) از ۳-۲-۱،

$$z_n^2 < \left(\frac{-a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n} = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n} = R.$$

برای اثبات (۳.۱۰)، گوییم ریشه‌های معادلهٔ

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

عکس ریشه‌های (۳.۲) هستند. بنابراین، ریشه‌های آن به‌صورت زیر مرتب می‌شوند

$$0 < \frac{1}{|z_n|} \le \dots \le \frac{1}{|z_1|}$$

پس، بنابر (۳.۹) داریم:

$$\frac{1}{|z_1|^2} < \left(\frac{-a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}$$

در نتیجه:

$$|z_1|^2 > \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}}.$$

به‌راحتی می‌توان چند جمله‌ایهایی ساخت که تمام ریشه‌های آنهاحقیقی باشد. (مثلاً، چندجمله‌ایهای چبیشف، یا به‌طور کلی، چندجمله‌ایهای متعامد که در فصل بعد آنها را معرفی خواهیم کرد. ضمناً معادلهٔ مشخصهٔ ماتریسهای متقارن ریشه‌های حقیقی دارد و معادلهٔ مشخصهٔ ماتریسهای معین مثبت ریشه‌های حقیقی و مثبت دارد [۹]. بنابراین کرانهای بالا و پایینی که از قضیهٔ ۳-۳-۳ به‌دست آمدند در عمل مفیدند. از قضیهٔ بالا نتایج زیر حاصل می‌شود.

۳ـ۳ـ۴ نتیجه

اگر تمام ریشه‌های معادلهٔ (۲.۳) حقیقی باشند

$$r<z_i^{۲}<R \quad , \quad i= ۱, ۲, ... , n \qquad (۱۱.۳)$$

یعنی، مربع ریشه‌های (۲.۳) به R و r محدودند. (R و r در ۳ـ۳ـ۳ تعریف شدند).

برهان

داریم $(i= ۱,...,n)$, $|z_۱| \le |z_i| \le |z_n|$ که از آن (۱۱.۳) حاصل می‌شود.

۳ـ۳ـ۵ نتیجه

اگر $P(z)$ چنان باشد که R یا r منفی باشد معادلهٔ $P(z)= ۰$ حتماً ریشهٔ مختلط دارد. به عبارت دیگر، شرط لازم برای آن‌که معادلهٔ $P(z)= ۰$ ریشهٔ مختلط نداشته باشد آن است که R و r هر د مثبت باشند، ولی این شرط کافی نیست. همچنین اگر $r>۰$ و R ولی $r\geq R$ معادله حتماً ریش مختلط دارد.

۳ـ۳ـ۶ مثال

الف) می‌دانیم که معادلهٔ $x^۳ - ۵x^۲ + ۸x - ۴= ۰$ فقط ریشه‌های حقیقی دارد، حدو ریشه‌های آن را تعیین کنید.

حل: بنابر قضیهٔ ۳ـ۳ـ۳،

$$R = ۵^۲ - ۲\times ۸ = ۹ \quad , \quad r = \frac{۱}{\left(\frac{-۸}{۴}\right)^۲ - ۲\times\frac{۵}{۴}} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین،

$$\frac{۲}{۳} < z_i^۲ < ۹$$

ب) نشان دهید که شرط $R>۰$ و r برای عدم وجود ریشهٔ مختلط برای (۲.۳) کافی نیست.

حل: معادلهٔ $z^۲ + ۳z + ۴= ۰$ را در نظر می‌گیریم، مقادیر R و r عبارت‌اند از

$$R = (-۳)^۲ - ۲\times ۴ = ۱ > ۰$$

$$r = \frac{۱}{\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ - ۲\times\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{\frac{۹}{۱۶}-\frac{۱}{۲}} = ۱۶ > ۰$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود $r>۰$ و R اما ریشه‌های معادله مذکور عبارت‌اند از:

$$z_1=\frac{-3+i\sqrt{7}}{2} \quad , \quad z_2=\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$$

یعنی، با وجود این‌که r و R هر دو مثبت هستند معادله ریشهٔ مختلط دارد.

۳-۳-۷ خودآزمایی

۱ـ اگر $a \neq 0$ ریشهٔ $p(z)=0$ باشد نشان دهید که $-a$ ریشهٔ $P(-z)=0$ و $\frac{1}{a}$ ریشهٔ $P(\frac{1}{z})=0$ است.

۲ـ می‌دانیم که تمام صفرهای چندجمله‌ایهای زیر حقیقی هستند، حدود ریشه‌های آنها را با استفاده از قضیه ۳-۳-۳ تعیین کنید.

(آ) $x^3-3x^2-x+3=0$

(ب) $8x^4-8x^2+1=0$

(پ) $16x^4-20x^2+5=0$

۳ـ اگر $P(z)=4z^3+4z^2-9z-9=0$، با استفاده از ۳-۳-۲ حدود ریشه‌های این معادله را به‌دست آورید. نشان دهید که ریشه‌های این معادله حقیقی است. (برای این کار ریشه‌ها را به‌دست آورید!) مجدداً، با استفاده از ۳-۳-۴، حدود ریشه‌های معادله را تعیین کنید. آیا کران بالاو پایینی که به‌دست می‌آورید با ماکسیمم و مینیمم قدر مطلق ریشه‌ها خیلی فاصله دارد؟

۴ـ اگر در معادلهٔ (۲.۳) داشته باشیم

$$a_i=a_{n-i} \quad , \quad i=1, 2, \dots , [\frac{n}{2}]$$

ثابت کنید رابطهٔ زیر بین ریشه‌ها برقرار است:

$$z_i\, z_{n-i}=1 \, , \quad i=1, 2, \dots , [\frac{n}{2}].$$

۳-۴ محاسبهٔ $P(z)$ و $P'(z)$ به ازای $z=a$

اگر منظور محاسبهٔ $P(z)$ به ازای $z=a$ باشد از طریق معمولی، یعنی محاسبهٔ تک تک جملات موجود در $P(z)$ و بعد جمع کردن آنها، باید $\frac{n(n+1)}{2}$ ضرب و n جمع انجام دهیم (مثلاً برای محاسبهٔ $a_n \times a^n$ باید n ضرب انجام داد. چگونه؟) در ادامه روشی ارائه می‌کنیم که فقط به n ضرب و n جمع نیازمند و با طبیعت کامپیوتر به عنوان وسیله‌ای سریع برای انجام کارهای تکراری سازگار است. قبلاً متذکر می‌شویم که اگر

$$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

آن‌گاه

$$P(a)=((a_3\times a+a_2)\times a+a_1)\times a+a_0$$

اگر عملیات را از داخلیترین پرانتز شروع کنید مشاهده می‌شود که به ۳ ضرب و ۳ جمع نیاز داریم. در صورتی که برای محاسبهٔ مستقیم

$$a_3 \times a^3 + a_2 \times a^2 + a_1 a + a_0$$

۶ ضرب و ۳ جمع باید انجام داد.

۳-۴-۱ قضیه

اگر

$$P(z) = (z-a)\left(b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \dots + b_2 z + b_1\right) + b_0 \qquad (۱۲.۳)$$

آن‌گاه،

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_i = a\, b_{i+1} + a_i \qquad , \quad i = n-1, n-2, \dots, 0 \end{cases}$$

و $P(a) = b_0$.

برهان

جملهٔ شامل z^n در طرف راست (۱۲.۳) عبارت است از $b_n z^n$ از این‌رو، $b_n = a_n$.

اگر $0 < i < n$ آن‌گاه جملات شامل z^i در طرف راست (۱۲.۳) عبارت‌اند از:

$$z\left(b_i z^{i-1}\right) - a\, b_{i+1} z^i = \left(b_i - a\, b_{i+1}\right) z^i$$

که در نتیجه باید داشته باشیم

$$a_i = b_i - a b_{i+1}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$b_i = a b_{i+1} + a_i \ , \ i = n-1, \dots, 1$$

اگر $i = 0$ در سمت راست (۱۲.۳) داریم $b_0 + a b_1 -$ که باید مساوی a_0 باشد، یعنی

$$b_0 = a b_1 + a_0$$

پس، به‌طور کلی

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_i = a\, b_{i+1} + a_i \qquad , \qquad i = n-1, \dots, 1, 0 \end{cases} \qquad (۱۳.۳)$$

b_i ها از دستگاه (۱۳.۳) به‌دست می‌آیند (شروع از b_n.) ضمناً، از (۱۲.۳)، با گذاشتن a به‌جای z داریم $P(a) = b_0$.

از دستگاه (۱۳.۳) علاوه بر b_0، یعنی $P(a)$، ضرایب خارج قسمت تقسیم $P(z)$ بر $(z-a)$ نیز به‌دست می‌آید. این روش محاسبه را **روش هورنر**[1] نامند.

در عمل از روش هورنر به طریق زیر استفاده می‌شود

$$\begin{array}{c|lllll} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\ a & +0 & ab_n & ab_{n-1} & \dots & ab_1 \\ \hline & b_n & b_{n-1}(=ab_n+a_{n-1}) & b_{n-2}(=ab_{n-1}+a_{n-2}) & & b_0(=ab_1+a_0) \end{array}$$

روش بالا به **تقسیم ترکیبی**[2] نیز معروف است.

۳ـ۴ـ۲ مثال

اگر $P(x)=2x^3-x^2-6$ مطلوب است محاسبهٔ $P(1/2)$.

حل: جدول زیر نحوهٔ به‌دست آوردن $P(1/2)$ را به‌خوبی نشان می‌دهد: (توجه داشته باشید که ضریب هر توانی از x که در $P(x)$ نیست صفر منظور می‌شود).

$$\begin{array}{c|cccc} & ۲ & -۱ & ۰ & -۶ \\ ۱/۲ & +۰ & ۲/۴ & ۱/۶۸ & ۲/۰۱۶ \\ \hline & ۲ & ۱/۴ & ۱/۶۸ & -۳/۹۸۴ \end{array}$$

بنابراین، $P(1/2) = -3/984$. ضمناً می‌توان نوشت

$$2x^3-x^2-6=(x-1/2)(2x^2+1/4x+1/68)-3/984$$

قضیهٔ زیر با استفاده از ۳ـ۴ـ۱ به‌دست می‌آید.

۳ـ۴ـ۳ قضیه

اگر $P(z)=(z-a)\,q(z)+b_0$ آن‌گاه $P'(a)=q(a)$.

برهان

واضح است که $P'(z)=q(z)+(z-a)q'(z)$ که از آن نتیجه می‌شود

$$P'(a)=q(a)+0\times q'(a)=q(a)$$

---

1. Horner

2. Synthetic Division

لذا، برای محاسبهٔ $P'(a)$ از ضرایب $q(z)$، که به روش هورنر به‌دست می‌آیند، استفاده می‌شود.

۳ـ۴ـ۴ مثال

اگر $P(z)= ۳z^۳ - ۴z + ۸$ مطلوب‌است محاسبهٔ $P(۲)$ و $P'(۲)$.

حل: جدول زیر مراحل محاسبه را نشان می‌دهد:

		۳	۰	۴-	۸
۲	+	۰	۶	۱۲	۱۶
		۳	۶	۸	$۲۴ = P(۲)$
۲	+	۰	۶	۲۴	
		۳	۱۲	$۳۲ = P'(۲)$	

۳ـ۴ـ۵ خودآزمایی

۱ـ مطلوب است محاسبهٔ $P(۲)$ و $P'(۲)$ وقتی که:

(آ) $P(z)= ۳z^۵ + z^۴ - z + ۵$

(ب) $P(z)= z^۳ - ۲z^۲+ z +۱$

(ج) $P(z)= z^۴ - ۱/۵z^۳+ ۲/۵\ z+۳/۵$

۲ـ اگر $P(z)= (z - a)\ q(z) + b_۰$ نشان دهید که $P''(a)= ۲q'(a)$ و راهی عملی، به روش هورنر، برای محاسبهٔ $P''(a)$ ارائه دهید.

۳ـ۵ تعیین ریشه‌های حقیقی $P(z)=۰$ با دقت مطلوب

برای تعیین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ

$$P(z)= a_n z^n + ... + a_۱ z + a_۰= ۰$$

از کلیهٔ مطالب گفته شده می‌توان استفاده کرد. اگر $a_۰ = ۰$ ابتدا ریشه(های) صفر را بیرون می‌کشیم و یک معادلهٔ چندجمله‌ای با جملهٔ ثابت مخالف صفر به‌دست می‌آوریم. سپس بنابر قضیهٔ ۳ـ۲ـ۹ ریشه‌های گویا را، در صورت وجود، به دست می‌آوریم و با استفاده از روش هورنر به یک چندجمله‌ای می‌رسیم که ریشه‌های آن اصم یا مختلط هستند.

برای محاسبهٔ ریشه‌های حقیقی و اصم از روش نیوتن، که همگرایی سریع دارد، استفاده می‌کنیم. اما، این روش نیاز به مقدار اولیه‌ای از ریشه دارد. با توجه به قضایای ۳ـ۳ـ۱، ۳ـ۳ـ۳ و نتایج آنها حدود این ریشه‌ها معین و ریشه‌ها را با شروع از بزرگترین، یکی‌یکی به‌دست می‌آوریم تا این‌که به یک چند جمله‌ای برسیم که تمام ریشه‌های آن مختلط باشد. ریشه‌های مختلط به

روش برستو[1] قابل محاسبه‌اند (علاقه‌مندان می‌توانند به [۴و۳] مراجعه کنند).

وقتی $x_\circ$ به‌دست آمد محاسبهٔ جملات $\{x_n\}$ با رابطهٔ زیر انجام می‌شود

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \quad , \quad n=\circ,۱,۲,... \qquad (۱۴.۳)$$

توجه داشته باشید که $P(x_n)$ و $P'(x_n)$ به روش هورنر به‌سادگی محاسبه می‌شوند. البته برای n های بزرگ باید از ماشین حساب یا کامپیوتر استفاده کرد.

۳ـ۵ـ۱ مثال

ریشه‌های معادلهٔ $x^۳+x^۲+۲x-۱=\circ$ را به‌دست آورید.

حل: چون درجهٔ چندجمله‌ای فرد است پس حداقل یک ریشهٔ حقیقی موجود است. با توجه به اینکه

$$P(\circ)=-۱<\circ \quad , \quad P(۱)=۳>\circ$$

یک ریشهٔ حقیقی بین ۰ و ۱ است. قرار می‌دهیم $x_\circ=\circ/۵$ و با استفاده از روش هورنر چند جمله را از فرمول (۱۴.۳) حساب می‌کنیم

		۱	۱	۲	−۱
۰/۵	+	۰	۰/۵	۰/۷۵	۱/۳۷۵
		۱	۱/۵	۲/۷۵	۰/۳۷۵=P(۰/۵)
۰/۵	+	۰	۰/۵	۱	
		۱	۲	۳/۷۵= P′(۰/۵)	

$$x_۱=\circ/۵-\frac{\circ/۳۷۵}{۳/۷۵}=\circ/۴$$

		۱	۱	۲	−۱
۰/۴	+	۰	۰/۴	۰/۵۶	۱/۰۲۴
		۱	۱/۴	۲/۵۶	۰/۰۲۴=P(۰/۴)
۰/۴	+	۰	۰/۴	۰/۷۲	
		۱	۱/۸	۳/۲۸= p′(۰/۴)	

$$x_۲=\circ/۴-\frac{\circ/\circ۲۴}{۳/۲۸}=\circ/۳۹۲۷\ (۴D)$$

---

1. Bairstow

این جواب تا سه رقم اعشار دقیق است و استفادهٔ مجدد از روش هورنر دقت آن را نشان می‌دهد. از جدول اخیر معلوم می‌شود که دو ریشهٔ دیگر مختلط هستند (چرا؟).

		۱	۱	۲	۱-
۰/۳۹۲۷	+	۰	۰/۳۹۲۷	۰/۵۴۶۹	۱/۰۰۰۱۶۷۶
		۱	۱/۳۹۲۷	۲/۵۴۶۹	۰/۰۰۰۱۶۷۶

زیرا داریم:

$$(x^{۳} + x^{۲} + ۲x - ۱) \simeq (x - ۰/۳۹۲۷)\ (x^{۲} + ۱/۳۹۲۷x + ۲/۵۴۶۹)$$

۳-۵-۲ خودآزمایی

۱ـ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ زیر را به‌دست آورید (تا چهار رقم اعشار درست).

$$x^{۳} - ۳x^{۲} - x + ۳ = ۰$$

۲ـ ثابت کنید معادلهٔ $x^{۲} - (۱ - x)^{۵} = ۰$ تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد و تقریبی از آن را تا چهار رقم اعشار درست حساب کنید.

۳ـ تقریبی از تنها ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر را تا چهار رقم اعشار درست حساب کنید.

$$x^{۳} - ۳x^{۲} + ۲x - ۱ = ۰$$

۴ـ تقریبی از ریشه‌های حقیقی معادلهٔ زیر را تا چهار رقم اعشار درست حساب کنید.

$$x^{۳} + ۲x^{۲} - ۵x - ۶ = ۰$$

۴

درونیابی

مقدمه

در ریاضیات محض، به خصوص در آنالیز ریاضی، معمولاً با توابعی سروکار داریم که با یک یا چند ضابطه تعریف شده‌اند. یعنی، به ازای هر مقدار متغیر، دستوری برای تعیین مقدار تابع داده شده است. اما، در عمل به‌ندرت با چنین وضعی روبه‌رو می‌شویم و اکثراً توابعی که باید مورد بررسی قرار گیرند مقدارشان به ازای بعضی از مقادیر متغیر و آن هم از طریق آزمایش و یا اندازه‌گیری به زحمت قابل تعیین است. به بیان دقیق مقادیر تابع f به ازای نقاط دو به‌دو متمایز

$$x_0 \ , \ x_1 \ , \ x_2 \ , \ \dots \ , \ x_n$$

به ترتیب عبارت‌اند از:

$$f_0 \ , \ f_1 \ , \ f_2 \ , \ \dots \ , \ f_n$$

یک چنین تابعی را **تابع جدولی** نامیم. نمونه‌هایی از این توابع را می‌شناسید، توابع مثلثاتی و تابع لگاریتم که مقدار آنها به ازای بعضی از مقادیر متغیر در جدولهایی درج شده است.

درونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x_0<x<x_n$ و

$$x \neq x_i \ , \ i= 1, 2, \dots , n-1$$

و برونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0,x_n]$.

در این فصل ضمن آشنایی بیشتر با مفاهیم فوق کاربردهای عملی آنها را در تخمین جمعیت در سالهای آینده و یا برآورد توابع مختلف دیگر خواهیم دید.

هدفهای کلی

۱ـ آشنایی با مفاهیم درونیابی و برونیابی

۲ـ معرفی چندجمله‌ای درونیاب

۳ـ تعیین چندجمله‌ای درونیاب به روش لاگرانژ و بیان معایب این روش

۴ـ تعیین چندجمله‌ای درونیاب به روش تفاضلات تقسیم شده و مزایای آن

۵ـ تعیین خطای چندجمله‌ای درونیاب و روش مینیمم کردن آن
۶ـ معرفی تفاضلات متناهی و کاربرد آنها در تعیین درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب و سرعت بخشیدن به همگرایی دنباله‌های همگرا
۷ـ ارائهٔ فرمولهای نیوتن، برای چندجمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات متناهی
۸ـ معرفی درونیابی معکوس و کاربرد آن

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:
۱ـ مفاهیم درونیابی و برونیابی را بیان و کاربردهایی از آنها را ارائه کند.
۲ـ چندجمله‌ای درونیاب مربوط به یک تابع جدولی را به روشهای گوناگون حساب کند.
۳ـ کران بالایی برای خطای چندجمله‌ای درونیاب حساب کند.
۴ـ جدول تفاضلات یک تابع جدولی را تشکیل و اطلاعات لازم را از آن کسب و چندجمله‌ای درونیاب را از آن به‌دست آورد.

۴ـ۱ مفهوم درونیابی

در ریاضیات از دیرباز توابع جدولی، یعنی توابعی که مقادیر آنها در نقاطی از حوزهٔ تعریف آنها در یک جدول ثبت شده است، مورد استفاده قرار می‌گرفته‌اند. همه با جدول مقادیر توابع sin، cos، tg و cotg به ازای ۰، ۱، ۲، ...، ۴۵ درجه آشنا هستید، همچنین با جدول مانتیس لگاریتم اعداد. آنچه در دبیرستان برای تعیین، مثلاً سینوس ۳۷ درجه و ۴۰ دقیقه انجام می‌دهید درونیابی خطی است که در اینجا آن را بررسی می‌کنیم. با پیدایش ماشین حساب و کامپیوتر جدولهای مذکور دیگر به‌کار نمی‌روند و درونیابی بیشتر

هنر شناخت معانی و مفاهیم مستتر در یک جدول

است. یکی از این معانی، تخمین مقدار یک تابع به ازای مقداری از x است که در جدول نیست، ولی بین نقاط جدولی است. این همان مفهوم درونیابی است.

برای تخمین f(x) وقتی f با جدول زیر داده شده است

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	...	f_n

راههای متفاوتی وجود دارد. یکی از راههای نسبتاً ساده این است که یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در x_i همان f_i باشد، البته به ازای $i = 0, 1, ..., n$. یعنی داشته باشیم

$$P(x_i)= f_i \quad , \quad i= ۰, ۱ , \dots , n \qquad (۱.۴)$$

و بعد به‌جای $f(x)$، در بازهٔ $[x_۰ , x_n]$، با $P(x)$ کار کنیم. اکنون سؤالاتی به صورت زیر مطرح می‌شود:

الف) چرا یک چندجمله‌ای پیدا می‌کنیم؟ مگر چندجمله‌ای چه خصوصیتی دارد که دیگر توابع ندارند؟

ب) آیا یک چندجمله‌ای که در (۱.۴) صدق کند همیشه وجود دارد؟ و در صورت وجود منحصر به‌فرد است؟

ج) آیا تعیین این چندجمله‌ای برای n های بزرگ عملی است؟

در پاسخ به سؤال (الف)، همه می‌دانیم که محاسبهٔ یک چندجمله‌ای به ازای مقداری از x بسیار ساده است (روش هورنر از فصل سوم). همچنین محاسبهٔ مشتق و انتگرال توابع چندجمله‌ای و حتی تعیین ریشه‌های یک معادلهٔ چندجمله‌ای مشکل نیست. جالب این‌که، در صورت متمایز بودن نقاط، جواب سؤال (ب) مثبت است و همیشه یک چندجمله‌ای منحصر به‌فرد وجود دارد و راههای ساده‌ای برای تعیین آن می‌شناسیم. این مطالب را در دیگر بخشهای این فصل مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۴ـ۲ چندجمله‌ایهای لاگرانژ

یکی از روشهای تعیین یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ n که در (۱.۴) صدق کند، روش لاگرانژ است. در این روش فرض می‌کنیم $L_۰(x)$، $L_۱(x)$، ...، $L_n(x)$ هریک، یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشند و داشته باشیم

$$P(x)= L_۰(x)\, f_۰ + L_۱(x)\, f_۱ + \dots + L_j(x)\, f_j + \dots + L_n(x) f_n \qquad (۲.۴)$$

و سعی می‌کنیم $L_j(x)$ ها را چنان تعیین کنیم که

$$P(x_i)= f_i \quad , \quad i= ۰,۱, \dots , n$$

برای این منظور می‌گوییم به ازای $i= ۰,۱, \dots, n$ باید داشته باشیم

$$P(x_i)=L_۰(x_i) f_۰ + \dots + L_j(x_i) f_j + \dots + L_n(x_i) f_n$$

لذا، کافی است (و در صورت مستقل بودن $L_i(x)$ ها از یکدیگر لازم است) داشته باشیم

$$\begin{cases} L_j(x_i) = ۰ & , i \neq j \\ L_j(x_j) = ۱ \end{cases} \qquad (۳.۴)$$

اما، تابع زیر

$$(x - x_۰) \dots (x - x_{j-۱})(x - x_{j+۱}) \dots (x - x_n) \qquad (۴.۴)$$

به ازای x_0، x_1، ...، x_{j-1}، x_{j+1}، ...، x_n صفر است، یعنی به ازای x_iهایی که $i \neq j$، کافی است کاری کنیم که مقدار این تابع به ازای x_j یک شود و این کار با تقسیم تابع مندرج در (۴.۴) بر عدد

$$(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)$$

امکان‌پذیر است. به عبارت دیگر

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)} \tag{۵.۴}$$

به سادگی می‌توانید آزمایش کنید که شرایط (۳.۴) برقرارند. چندجمله‌ایهای درجهٔ n که به‌وسیلهٔ (۵.۴) بیان می‌شوند به **چندجمله‌ایهای لاگرانژ** معروف‌اند.

۴-۲-۱ مثال

چندجمله‌ای $P(x)$ را که مربوط به تابع جدولی زیر است حساب کنید.

x_i	۱-	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل: در این مثال $n = 2$ و در نتیجه چندجمله‌ایهای لاگرانژ از درجهٔ دو هستند. چندجمله‌ایهای لاگرانژ به قرار زیرند:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = \frac{x^2 - 1}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

از این رو، بنابر فرمول (۲.۴) داریم

$$P(x) = 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) = \frac{x^2 - x}{2} - (x^2 - 1) + \frac{3(x^2 + x)}{2}$$

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

تحقیق کنید که $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$.

تذکر: چندجمله‌ای $P(x)$ را می‌توان به روش ضرایب مجهول نیز به‌دست آورد. به این معنا که فرض می‌کنیم

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

و قرار می‌دهیم

$$P(-1)=1 \ , \ P(0)=1 \ , \ P(1)=3$$

که درنتیجه یک‌دستگاه سه‌معادله، سه مجهول حاصل‌می‌شود که جواب آن $a=b=c=1$ خواهد بود (امتحان کنید). اما در عمل n می‌تواند بزرگ باشد و نقاط x_i نزدیک به هم، که در نتیجه حل یک دستگاه شامل $(n+1)$ معادله و $(n+1)$ مجهول را با اشکالاتی مواجه می‌کند.

۴-۲-۲ مثال

با اضافه کردن نقطهٔ (۲,۷) به تابع جدولی مثال (۴-۲-۱) مجدداً چندجمله‌ای $P(x)$ را حساب کنید. به عبارت دیگر، چندجمله‌ای مربوط به جدول زیر را حساب کنید.

x_i	−۱	۰	۱	۲
f_i	۱	۱	۳	۷

حل: در این مثال $n=3$ و چندجمله‌ایهای لاگرانژ همه از درجهٔ ۳ هستند. این چندجمله‌ایها عبارت‌اند از:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{6}$$

در نتیجه چندجمله‌ای $P(x)$ عبارت است از:

$$P(x) = 1\times L_0(x) + 1\times L_1(x) + 3\times L_2(x) + 7\times L_3(x)$$
$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} + \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} + \frac{3(x^3 - x^2 - 2x)}{-2}$$
$$+ \frac{7(x^3 - x)}{6}$$

که پس از ساده کردن نتیجه می‌شود

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

ضمناً از طریق محاسبه معلوم می‌شود که

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) = 1$$

مشاهده می‌شود که $P(x)$ از درجهٔ ۲ است ولی $L_i(x)$ ها از درجهٔ ۳ هستند. ضمناً از محاسبات مربوط به مثال (۴-۲-۱) کمتر استفاده شد. یعنی، با اضافه کردن یک نقطه به جدول باید تقریباً تمام عملیات را از سر گرفت. حجم عملیات نیز با افزایش n به سرعت بالا می‌رود. در ضمن درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب قبل از تعیین کامل آن معلوم نمی‌شود.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که چندجمله‌ای $P(x)$ که در (۱.۴) صدق می‌کند منحصر به‌فرد است.

۴-۲-۳ قضیه

فقط یک چندجمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجهٔ n، وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$P(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \qquad (۶.۴)$$

برهان

وجود یک چندجمله‌ای بنابر (۲.۴) و (۵.۴) محقق است، کافی است ثابت کنیم $P(x)$ موجود منحصر به‌فرد است. این مطلب را از این طریق برهان خلف ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $Q(x)$ چندجمله‌ای دیگری حداکثر از درجهٔ n باشد به قسمی که

$$Q(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

در این صورت اگر قرار دهیم

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

خواهیم داشت

$$R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = f_i - f_i = 0 \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

یعنی، معادلهٔ $R(x) = 0$، که حداکثر از درجهٔ n است (چرا؟)، دارای n+1 ریشهٔ

$x_0, x_1, \dots, x_n$ است. چون یک چندجمله‌ای درجهٔ n و غیرمتحد با صفر (یعنی یک چندجمله‌ای که حداقل یکی از ضرایب آن صفر نباشد) حداکثر n ریشه دارد نتیجه می‌گیریم که

$$R(x) \equiv 0$$

یعنی، $P(x) \equiv Q(x)$ که خلاف متمایز بودن $P(x)$ و $Q(x)$ است. بنابراین، فقط یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ n وجود دارد که در نقاط x_i مقادیر f_i را اختیار می‌کند.

۴ـ۲ـ۴ تعریف

چندجمله‌ای منحصر به‌فرد $P(x)$ که در (۶.۴) صدق می‌کند **چندجمله‌ای درونیاب** یا **چندجمله‌ای هم محل** تابع f در نقاط x_0، x_1، ... ، x_n نامیده می‌شود.

روش لاگرانژ برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب تنها از لحاظ نظری مورد توجه است ولی همان‌گونه که در مثال ۴ـ۲ـ۲ نشان داده شد از لحاظ عددی معایب زیادی است.

۴ـ۲ـ۵ معایب روش لاگرانژ

۱ـ محاسبات این روش، وقتی n خیلی هم بزرگ نباشد، زیاد است و خودکار کردن عملیات نیز ساده نیست. (به این مطلب فکر کنید که چگونه می‌توان ضرایب توانهای مختلف x را در هریک از چندجمله‌ایهای لاگرانژ با کامپیوتر حساب کرد).

۲ـ درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب بعد از انجام تمام محاسبات تعیین می‌شود و با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدولی باید تقریباً تمام عملیات را از سر گرفت.

۳ـ چون چندجمله‌ای درونیاب به تدریج حساب نمی‌شود این روش را باید با احتیاط کامل به‌کار برد (مثال زیر را مطالعه کنید).

۴ـ۲ـ۶ مثال

جدول مربوط به تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ داده شده است مطلوب است تخمین $\sqrt[3]{20}$ با استفاده از درونیابی لاگرانژ.

x_i	۰	۱	۸	۲۷	۶۴
f_i	۰	۱	۲	۳	۴

حل: با توجه به تعریف چندجمله‌ایهای لاگرانژ داریم (توجه کنید که $f_0 = 0$ و $L_0(x) \times f_0 = 0$)

$$P(x)=\frac{x(x-۸)(x-۲۷)(x-۶۴)}{۱(-۷)(-۲۶)(-۶۳)}\times ۱+\frac{x(x-۱)(x-۲۷)(x-۶۴)}{۸(۷)(-۱۹)(-۵۶)}\times ۲$$
$$+\frac{x(x-۱)(x-۸)(x-۶۴)}{۲۷(۲۶)(۱۹)(-۳۷)}\times ۳+\frac{x(x-۱)(x-۸)(x-۲۷)}{۶۴(۶۳)(۵۶)(۳۷)}\times ۴$$

برای تخمین $\sqrt[۳]{۲۰}$ به‌جای x قرار می‌دهیم ۲۰ خواهیم داشت

$$\sqrt[۳]{۲۰}\simeq P(۲۰)=-۱/۳۱۳۹ \quad (۴D)$$

با رسم منحنی مشاهده می‌شود برآورد $\sqrt[۳]{۲۰}$ منفی است! علت چیست؟

$$y=\sqrt[۳]{x}$$

در فاصلهٔ [۲۷ , ۸] معلوم می‌شود که شکل منحنی نزدیک به یک خط مستقیم است. لذا، اگر در این فاصله چندجمله‌ای درونیاب درجهٔ اول را به‌دست آوریم حاصل می‌شود

$$P_۱(x)=\frac{x-۲۷}{۸-۲۷}\times ۲+\frac{x-۸}{۲۷-۸}\times ۳$$

و به‌دست می‌آید

$$\sqrt[۳]{۲۰}\simeq P_۱(۲۰)=\frac{۱۴}{۱۹}+\frac{۳۶}{۱۹}=\frac{۵۰}{۱۹}=۲/۶۳۱۶$$

که از $\sqrt[۳]{۲۰}=۲/۷۱۴۴\ (۴D)$ خیلی دور نیست.

۴ـ۲ـ۷ خودآزمایی

۱ـ اگر مقدار تابع f در $x_۰$ برابر $f_۰$ و در $x_۱$ برابر $f_۱$ باشد چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط $x_۰$ و $x_۱$ به‌دست آورید و با استفاده از آن تخمینی از $f\left(\frac{x_۰+x_۱}{۲}\right)$ را حساب کنید.

۲ـ چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را به‌دست آورید و بعد $f\left(\frac{-۱}{۲}\right)$ و $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ را برآورد کنید.

x_i	۱-	۰	۱	۲
f_i	۲-	۱-	۰	۷

۳ـ با اضافه کردن نقطهٔ (۹- , ۲-) به جدول بالا مجدداً چندجمله‌ای درونیاب راحساب و نتیجه راتوجیه کنید.

۴ـ ثابت کنید که همواره

$$L_۰(x)+L_۱(x)+\dots+L_n(x)=۱$$

یعنی، مجموع چندجمله‌ایهای لاگرانژ برابر واحد است. (*راهنمایی*: چندجمله‌ای درونیاب تابع ثابت $f(x)=1$ را بنویسید).

۵ـ ثابت کنید چندجمله‌ایهای لاگرانژ مستقل خطی‌اند.

۶ـ اگر $F(x)=(x-x_0)\dots(x-x_n)$ نشان دهید که

$$L_j(x)=\frac{F(x)}{(x-x_j)\,F'(x_j)}$$

۳ـ۴ روش تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن

می‌دانیم که یک چندجمله‌ای را به طرق مختلف می‌توان نوشت. در فرمول (۲.۴)، برای چندجمله‌ای درونیاب، این چندجمله‌ای برحسب ترکیب خطی خاصی از چندجمله‌ایهای لاگرانژ نوشته شده است. ولی می‌توان n چندجمله‌ای مستقل خطی دلخواه در نظر گرفت و $P(x)$ را بر حسب ترکیبی خطی از آنها نوشت. اگر چندجمله‌ایهای زیر را در نظر بگیرید.

$$1,\ (x-x_0),\ (x-x_0)(x-x_1),\dots,\ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

می‌توان نشان داد که این چندجمله‌ایها مستقل خطی هستند. اکنون فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط x_0، x_1،...، x_n باشد و

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

با توجه به اینکه باید داشته باشیم $P(x_i)=f_i$ می‌توان a_i ها را به‌دست آورد.

مثلاً با قرار دادن $x=x_0$ داریم

$$P(x_0)=a_0$$

و چون باید $p(x_0)=f_0$ پس،

$$a_0=f_0 \qquad (۷.۴)$$

با قرار دادن $x=x_1$ به‌دست می‌آوریم

$$P(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)$$

که با توجه به (۷.۴) و اینکه $P(x_1)=f_1$ نتیجه می‌شود

$$a_1=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

و به همین ترتیب بقیه a_i ها بر حسب نقاط و f_i ها به‌دست می‌آیند. نیوتن با توجه به مقادیری که برای ضرایب به‌دست می‌آیند تفاضلات تقسیم شده را معرفی و یک فرمول بازگشتی برای محاسبه آنها ارائه کرد.

۱ـ۳ـ۴ تفاضلات تقسیم شده

فرض کنید x_0، x_1،...، x_n نقاط دوبه‌دو متمایز و f_0، f_1،...، f_n مقادیر تابع f در این نقاط باشد.

تفاضلات تقسیم شدهٔ اول بین x_i و x_{i+1} چنین تعریف می‌شود

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

بنابراین،

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} \tag{۸.۴}$$

تفاضلات تقسیم شدهٔ دوم بین x_i، x_{i+1} و x_{i+2} چنین تعریف می‌شود

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

به عنوان مثال

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}. \tag{۹.۴}$$

تفاضلات تقسیم شدهٔ nام بین نقاط x_0، x_1، ...، x_n عبارت است از:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

همچنین اگر x نقطهٔ دلخواهی از (x_0 , x_n) باشد و

$$x \neq x_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

تفاضلات تقسیم شدهٔ بین x، x_0، ...، x_n عبارت است از:

$$f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x, x_0, \ldots, x_{n-1}] - f(x_0, \ldots, x_n)}{x - x_n} \tag{۱۰.۴}$$

۴ـ۳ـ۲ مثال

با استفاده از جدول ذیل تفاضلات تقسیم شدهٔ مربوط به تابع f را حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲	۳
f_i	-۱	۱	۱	۵	۱۹

حل: با توجه به (۸.۴) داریم

$$f\left[x_۰,x_۱\right]=\frac{f(-۱)-f(۰)}{-۱-۰}=\frac{-۱-۱}{-۱-۰}=۲$$

$$f\left[x_۱,x_۲\right]=\frac{f(۰)-f(۱)}{۰-۱}=\frac{۱-۱}{۰-۱}=۰$$

و با توجه به (۹.۴) می‌توان نوشت

$$f\left[x_۰,x_۱,x_۲\right]=\frac{۲-۰}{-۱-۱}=-۱$$

بقیهٔ تفاضلات در جدول (۴ـ۱) درج شده‌اند (به نحوهٔ درج تفاضلات توجه کنید).

جدول (۴ـ۱)

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+۱}]$	$f[x_i,x_{i+۱},x_{i+۲}]$	تفاضلات سوم	تفاضل چهارم
-۱	-۱				
		$\frac{-۱-۱}{-۱-۰}=۲$			
			$\frac{۲-۰}{-۱-۱}=-۱$	$\frac{-۱-۲}{-۱-۲}=۱$	
۰	۱				
		$\frac{۱-۱}{۰-۱}=۰$	$\frac{۰-۴}{۰-۲}=۲$		$\frac{۱-۱}{-۱-۳}=۰$
۱	۱	$\frac{۱-۵}{۱-۲}=۴$			
				$\frac{۲-۵}{۰-۳}=۱$	
۲	۵				
		$\frac{۵-۱۹}{۲-۳}=۱۴$	$\frac{۴-۱۴}{۱-۳}=۵$		
۳	۱۹				

خلاصه، جدول بالا چنین است: (پس از حل چند تمرین نیازی به نوشتن کسرها نیست)

جدول (۴ـ۲)

تفاضلات تقسیم شدهٔ:

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
۱-	۱-				
		۲			
۰	۱				
			۱-		
		۰		۱	
۱	۱				
			۲		۰
		۴		۱	
۲	۵				
			۵		
		۱۴			
۳	۱۹				

۴ـ۳ـ۳ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به‌دست آورید. سپس با اضافه کردن نقطهٔ (۲,۷) مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

x_i	۱-	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل: با توجه به مثال قبل داریم:

ضمناً زیر اعدادی که پس از اضافه کردن نقطهٔ (۲,۷) حاصل می‌شوند خط کشیده شده است.

جدول (۴ـ۳)

تفاضلات تقسیم شده:

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۱-	۱			
		۰		
۰	۱		۱	
		۲		۰
۱	۳		۱	
		۴		
۲	۷			

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که از جدول تفاضلات می‌توان درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب را، قبل از به‌دست آوردن آن، معین کرد. مثلاً جدول (۴ـ۲) نشان می‌دهد که چندجمله‌ای درونیاب f از درجهٔ ۳ است. ضمناً جدول (۴ـ۳) نشان می‌دهد که با اضافه کردن نقطهٔ (۲,۷) درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب تغییر نمی‌کند و برابر ۲ است.

۴ـ۳ـ۴ قضیه (فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن)

چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0، x_1، ...، x_n عبارت از

$$P(x)= f_0 + (x - x_0) f[x_0,x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f [x_0, x_1,\dots,x_n]$$

برهان

با توجه به (۴.۱۰) داریم (با قرار دادن $i+1$ به‌جای n و ساده کردن)

$$f[x,x_0,\dots,x_i]= f[x_0 ,\dots, x_{i+1}] + (x - x_{i+1}) f[x, x_0 ,\dots, x_{i+1}]$$

حال در تساوی فوق به i، به ترتیب، مقادیر ۰، ۱، ....، $n-1$ می‌دهیم؛ حاصل می‌شود:

$$f\left[x,x_0\right] =f\left[x_0,x_1\right] +\left(x-x_1\right) f\left[x,x_0,x_1\right]$$

$$f\left[x,x_0,x_1\right] =f\left[x_0,x_1,x_2\right] +(x-x_2)f\left[x,x_0,x_1,x_2\right]$$

$$f[x,x_0,\dots,x_{n-2}]=f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]+(x-x_{n-1})\,f[x,x_0,\dots,x_{n-1}]$$
$$f[x,x_0,\dots,x_{n-1}]=f[x_0,\dots,x_n]+(x-x_n)\,f[x,x_0,\dots,x_n]$$

با ضرب طرفین تساوی دوم در $(x - x_1)$ (به‌منظور حذف $f[x,x_0,x_1]$ $(x - x_1)$ از طرفین، بعد از جمع کردن تساویهای اول و دوم) و ضرب طرفین تساوی سوم در $(x - x_1)$ $(x - x_2)$ و... تساوی nام در $(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$ و جمع حاصل آنها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}f[x,x_0]&=f[x_0,x_1]+(x-x_1)\,f[x_0,x_1,x_2]\\&+\dots+(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\,f[x_0,\dots,x_n]\\&+(x-x_1)\dots(x-x_n)\,f[x,x_0,\dots,x_n]\end{aligned}$$

اگر به‌جای $f[x,x_0]$ مقدارش $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0)}$ را قرار دهیم و طرفین رادر $(x - x_0)$ ضرب کنیم حاصل می‌شود (با توجه به اینکه $f(x_0)= f_0$)

$$\begin{aligned}f(x)&=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\dots\\&+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,\dots,x_n]\\&+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\,f[x,x_0,\dots,x_n]\end{aligned}$$

با فرض

$$\begin{aligned}P(x)&=f_0+(x-x_0)\,f[x_0,x_1]+\dots\\&+(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\,f[x_0,\dots,x_n]\end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

و

$$R(x)= (x - x_0) \dots (x - x_n)\, f[x, x_0, \dots, x_n] \tag{۱۲.۴}$$

داریم:

$$f(x)= P(x) + R(x)$$

چون

$$R(x_i)=0 \quad , \quad i=0,1,\dots,n$$

نتیجه می‌گیریم که

$$f(x_i)=P(x_i)+0=P(x_i)$$

که با توجه به منحصر به فرد بودن چندجمله‌ای درونیاب، $P(x)$ که با (۱۱.۴) مشخص شده است همان چندجمله‌ای درونیاب است. ضمناً $R(x)$ که با (۱۲.۴) مشخص شده باقیمانده یا $f(x)-P(x)$ است که خطای چندجمله‌ای درونیاب نامیده می‌شود.

۴ـ۳ـ۵ مثال

چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را با استفاده از تفاضلات تقسیم شده به‌دست آورید و $f(\frac{1}{2})$ را برآورد کنید.

x_i	-1	1	2	3
f_i	-2	0	7	26

حل: با توجه به جدول بالا جدول تفاضلات تقسیم شدهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم.

تفاضلات تقسیم شدهٔ:

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-1	-2			
		1		
1	0		2	
				1
		7		
2	7		6	
		19		
3	26			

از این‌رو، بنابر فرمول (۱۱.۴) برای چندجمله‌ای درونیاب، داریم

$$\begin{aligned} P(x) &= -2 + (x+1)\times 1 + (x+1)(x-1)\times 2 \\ &\quad + (x+1)(x-1)(x-2)\times 1 \\ &= -2 + x + 1 + 2x^2 - 2 + x^3 - 2x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

که در نتیجه،

$$P(x) = x^3 - 1$$

$$f\left[\frac{1}{2}\right] \simeq P\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{-7}{8}$$

۴ـ۳ـ۶ مثال

چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به‌دست آورید. سپس با اضافه کردن نقطهٔ (۴,۱۱) به آن مجدداً چندجمله‌ای درونیاب راحساب کنید.

x_i	۱	۲	۳
f_i	۲	۵	۱۰

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به قرار زیر است. (زیر اعداد مربوط به اضافه کردن (۴,۱۱) خط کشیده شده است).

تفاضلات تقسیم شدهٔ:

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۱	
		۵		−۱
۳	۱۰		−۲	
		۱		
۴	۱۱			

چندجمله‌ای درونیاب مربوط به نقاط ۱، ۲ و ۳ عبارت است از

$$P(x) = ۲ + (x - ۱) \times ۳ + (x - ۱)(x - ۲) \times ۱ = x^۲ + ۱$$

برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای درونیاب مربوط به نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ کافی است که جملهٔ زیر را به $P(x)$ قبلی اضافه کنیم

$$(x - ۱)\ (x - ۲)\ (x - ۳) \times (-۱)$$

از این‌رو، چندجمله‌ای مطلوب عبارت است از (امتحان کنید)

$$P(x) = -x^۳ + ۷x^۲ - ۱۱x + ۷$$

مشاهده می‌شود که یکی از محاسن روش تفاضلات تقسیم شده برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب آن است که چندجمله‌ای را به‌تدریج محاسبه می‌کند و با اضافه کردن نقطه یا نقاطی به جدول، محاسبات قبلی تماماً به‌کار می‌روند. ضمناً درجهٔ چندجمله‌ای نیز از روی جدول تفاضلات قابل پیش‌بینی است.

۴-۳-۷ خودآزمایی

۱ـ تابع جدولی زیر مفروض است. چندجمله‌ای درونیاب f را به‌دست آورید. آیا با اضافه کردن نقطهٔ (۲,۱) چندجمله‌ای درونیاب تغییر می‌کند؟ (چرا؟)

x_i	۱-	۰	۱
f_i	۱+	۱-	۱-

۲ـ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده به‌دست آورید.

x_i	۲-	۱-	۰	۱	۲
f_i	۹-	۲-	۱-	۰	۷

۳ـ درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر راحساب کنید.
(*راهنمایی*: درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب بزرگترین مرتبهٔ تفاضلات تقسیم شدهٔ مخالف صفر است).

x_i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
f_i	۳	۲	۷	۲۴	۵۹	۱۱۸

۴ـ چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را به‌دست آورید و f(۱/۲) و f(۱/۷) را تخمین بزنید.

x_i	۱-	۰/۵-	۰	۱/۵
f_i	۰/۲	۱/۰۷۵	۱/۲	۴/۵۷۵

۵ـ جدول زیر را، با توجه به تعداد جمعیت در سالهای درج شده، کامل کنید و بعد تعداد جمعیت در سال ۱۳۷۵ را برآورد کنید. (کاربرد برونیابی)

سال	۱۳۵۵	۱۳۶۰	۱۳۶۵	۱۳۷۰
جمعیت				

۴ـ۴ خطای چندجمله‌ای درونیاب

تاکنون دو روش برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب یک تابع در تعدادی نقطه ارائه کرده‌ایم. در این قسمت می‌خواهیم خطای $P(x)$ و یا به عبارت دیگر $|f(x) - P(x)|$ را حساب کنیم. واضح است که خطای مطلق $P(x)$ نشان خواهد داد که $P(x)$، به ازای هر x از حوزهٔ تعریف f، تقریب خوبی برای این تابع هست یا نیست، ضمناً راههای مینیمم‌سازی خطای مطلق $P(x)$ را نیز تحقیق خواهیم کرد. قبلاً قضیهٔ زیر را، بدون اثبات، یادآوری می‌کنیم (اثبات این قضیه در کتابهای ریاضیات عمومی آمده است).

۱ـ۴ـ۴ قضیه رول

اگر f بر $[a,b]$ معین و در (a,b) مشتق داشته باشد و $f(a)= f(b)= \circ$ آنگاه عددی چون c هست که

$$a<c<b \quad , \quad f'(c)= \circ$$

۲ـ۴ـ۴ قضیه

اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط دوبه‌دو متمایز $x_\circ$، x_1،...، x_n و f دارای مشتق مرتبهٔ $(n+1)$ باشد آنگاه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_\circ)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta_x)$$

که در آن η_x نقطه‌ای در $[x_\circ , x_n]$ است که در حالت کلی به x بستگی دارد.

برهان

با توجه به این‌که

$$f(x_i)= P(x_i) \quad , \quad i= \circ, 1,\dots, n$$

تابع $f(x) - P(x)$ عامل $(x - x_\circ)$، $(x - x_1)$،...، $(x - x_n)$ دارد یعنی، می‌توان نوشت

$$f(x) - P(x) = (x-x_\circ)(x-x_1)\dots(x-x_n)\, g(x) \tag{۱۳.۴}$$

لذا، سعی می‌کنیم $g(x)$ را حساب کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم z عددی دلخواه و از این به بعد ثابت در $[x_\circ , x_n]$ باشد و

$$z \neq x_i \quad , \quad i= \circ, 1,\dots, n$$

و سعی می‌کنیم $g(z)$ را به‌دست آوریم. برای این منظور تابع کمکی ذیل را تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(x)= f(x) - P(x) - (x - x_\circ)(x - x_1)\dots(x - x_n)\, g(z) \qquad (۱۴.۴)$$

با توجه به اینکه $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_\circ$، ...، x_n است داریم

$$\varphi(x_i)= \circ \quad , \quad i= \circ, 1,\dots, n$$

و با توجه به تساوی (۱۳.۴) داریم

$$\varphi(z)= \circ$$

بنابراین، معادلهٔ

$$\varphi(x)= \circ$$

حداقل $n+2$ ریشهٔ دوبه‌دو متمایز $x_\circ$، ...، x_n و z دارد. اگر z بین دو نقطهٔ x_i و x_{i+1} باشد تابع $\varphi(x)$ در نقاط زیر صفر می‌شود

$$x_\circ, x_1,\dots, x_i, z, x_{i+1},\dots, x_n$$

از این‌رو، بنابر قضیه ۴-۴-۱

$$\varphi'(y_j)= \circ \quad , \quad j= \circ, 1,\dots, n$$

که در آن y_j ها بین نقاط قبلی قرار دارند (به صورت زیر) و دوبه‌دو متمایزند.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_\circ & , & x_1 & , & x_2,\dots, & x_i & , z , & x_{i+1},\dots, & x_{n-1} & , & x_n \\ & y_\circ & , & y_1 & ,\dots, & & y_i & , y_{i+1} & ,\dots, & y_n & \end{array}$$

به همین ترتیب $\varphi''(x)= \circ$ دارای حداقل n ریشه است و بالاخره معادلهٔ $\varphi^{(n+1)}(x)=\circ$ حداقل یک ریشه مانند η_z دارد. یعنی،

$$\varphi^{(n+1)}(\eta_z)= \circ \qquad (۱۵.۴)$$

که در آن η_z وابسته به z است و در $(x_\circ, x_n)$ قرار دارد.

اگر از (۱۴.۴)، $(n+1)$ بار مشتق بگیریم (با توجه به اینکه مشتق چندجمله‌ای $P(x)$ صفر می‌شود و مشتق $(n+1)$ام چندجمله‌ای $(x-x_\circ)\dots(x-x_n)$ برابر مشتق $(n+1)$ام تابع x^{n+1} یعنی، $(n+1)!$ است داریم

$$\varphi^{(n+1)}(x)= f^{(n+1)}(x) - \circ - (n+1)!\, g(z)$$

که با توجه به (۱۵.۴) خواهیم داشت

$$g(z)=\frac{f^{(n+1)}(\eta_z)}{(n+1)!}$$

که با تبدیل z به x به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}$$

از قضیهٔ بالا نتیجه زیر فوراً حاصل می‌شود.

۴-۴-۳ نتیجه

با شرایط قضیهٔ ۴-۴-۲ داریم

$$|f(x)-P(x)| \le |(x-x_{\circ})\cdots(x-x_n)| \times \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \qquad (16.4)$$

که در آن M_{n+1} یک کران بالا برای $|f^{(n+1)}(x)|$ بر $[x_{\circ},x_n]$ است. یعنی، برای هر x از $[x_{\circ},x_n]$، $|f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1}$. در عمل، به دلیل مشخص نبودن محل η_x، از (۴-۴-۳) استفاده می‌شود. در اینجا باچند مثال کاربرد قضیهٔ ۴-۴-۲ و نتیجهٔ آن را توضیح می‌دهیم.

۴-۴-۴ مثال

چندجمله‌ای درونیاب $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ را در نقاط $x_{\circ}=0$ و $x_1=1$ به‌دست آورید و کران بالایی برای $|f(x)-P(x)|$ حساب کنید. مقدار $|f(\frac{1}{2})-P(\frac{1}{2})|$ را باکران بالا در $x=\frac{1}{2}$ مقایسه کنید.

حل: جدول مربوط به تابع عبارت است از:

x_i	f_i	تفاضل اول
۰	۱	
		۱-
۱	۰	

بنابراین، چندجمله‌ای درونیاب چنین‌است:

$$P(x)=1+(x-0)\times(-1)=1-x$$

واضح است که

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\quad P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

بنابراین،

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-P\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{2}=0{,}21 \quad (2D)$$

برای تعیین یک کران بالا برای $|f(x)-P(x)|$ باید کران بالایی برای مشتق دوم تابع f به‌دست آوریم. برای این منظور مشتقات مرتبهٔ اول و دوم تابع f را حساب می‌کنیم.

$$f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi x}{2}$$

در نتیجه

$$|f''(x)| \leq \frac{\pi^۲}{۴} = M_۲$$

پس، بنابر ۴ـ۴ـ۳،

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-۰)(x-۱)| \times \frac{\frac{\pi^۲}{۴}}{۲!} = \frac{\pi^۲}{۸}|x^۲ - x|$$

مقدار کران بالا به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ برابر است با

$$\frac{\pi^۲}{۸} \times \left|\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}\right| = \frac{\pi^۲}{۳۲} = ۰/۳۱ \quad (۲D)$$

که با مقدار واقعی خطا، یعنی ۰/۲۱، ۰/۱ اختلاف دارد و بیانگر خوب نبودن تقریب یا نامناسب بودن چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌عنوان یک تقریب برای $\cos\frac{\pi x}{۲}$ است. ضمناً، با توجه به اینکه مقدار $|x^۲ - x|$ در $x=\frac{۱}{۲}$ ماکسیمم مقدار خود را خواهد داشت (چرا؟) خطای $|f(x) - P(x)|$ در نقاط دیگر کمتر از $\frac{\pi^۲}{۳۲}$ خواهد بود.

۴ـ۴ـ۵ مثال

فرض کنید $f(x)= \sin\frac{\pi x}{۲}$. چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط

$$x_۰ = ۰ \quad , \quad x_۱ = ۱ \quad , \quad x_۲ = ۲$$

به‌دست آورید و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید. آیا $P(x)$ تقریب خوبی است؟

حل: با توجه به نقاط و ضابطهٔ تابع f، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x_i	$\sin\frac{\pi x_i}{۲}$	تفاضل اول	تفاضل دوم
۰	۰		
		۱	
۱	۱		−۱
		−۱	
۲	۰		

از این‌رو، چندجمله‌ای درونیاب عبارت است از

$$P(x) = ۰ + (x-۰)\times ۱ + (x-۰)(x-۱)\times(-۱) = -x^۲ + ۲x .$$

برای تعیین یک کران بالا باید مشتق سوم تابع f را حساب کنیم.

$$f'(x)=\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲} \quad , \quad f''(x)=-\frac{\pi^۲}{۴}\sin\frac{\pi x}{۲}$$

$$f^{(۳)}(x)=-\frac{\pi^۳}{۸}\cos\frac{\pi x}{۲}$$

در نتیجه، با توجه به این‌که همواره $\left|\cos\frac{\pi x}{۲}\right| \le ۱$ ،

$$\left| f^{(۳)}(x) \right| \le \frac{\pi^۳}{۸}=M_۳$$

بنابراین

$$\left| f(x)-P(x) \right| \le \left| (x-۰)(x-۱)(x-۲) \right| \times \frac{\frac{\pi^۳}{۸}}{۳!}=\frac{\pi^۳}{۴۸}\left| x(x-۱)(x-۲) \right|$$

با توجه به این‌که

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad , \quad P\left(\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۱}{۴}+۲\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

داریم

$$\left| f\left(\frac{۱}{۲}\right)-P\left(\frac{۱}{۲}\right) \right| =\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۲}=۰/۰۴ \quad (۲D)$$

اما، کران بالای حساب شده به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ مقدار زیر را داراست

$$\frac{\pi^۳}{۴۸}\times\left|\frac{۱}{۲}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)\times\left(-\frac{۳}{۲}\right)\right|=\frac{\pi^۳}{۱۲۸}=۰/۲۴ \quad (۲D)$$

که نشان می‌دهد تخمین خطا فاصله زیادی تا مقدار واقعی خطا دارد. این پدیده گرچه طبیعی است ولی وقتی ارزشمند است که کران بالای خطا با خطای واقعی اختلاف زیادی نداشته باشد.

برای تعیین کران بالای مستقل از x باید ماکسیمم

$$|x(x-۱)(x-۲)|$$

را بر $[۰, ۲]$ به‌دست آوریم. برای این منظور چنین قرار می‌دهیم:

$$g(x)=x(x-۱)(x-۲), \quad g'(x)=۳x^۲-۶x+۲$$

ریشه‌های $g'(x)=۰$ برابرند با

$$x_۲=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad x_۱=۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

با محاسبه معلوم می‌شود که

$$|g(x_1)| = |g(x_2)| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

پس،

$$|g(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

بنابراین،

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3}{48} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} \simeq 0/78.$$

۴-۴-۶ خودآزمایی

۱ـ فرض کنید $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$، $x_0 = -1$، $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$. چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_0، x_1 و x_2 به‌دست آورید و یک کران بالا برای خطای آن حساب کنید.

۲ـ ثابت کنید

$$f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}, \quad (\eta_x \in (x_0, x_n))$$

(*راهنمایی*: از فرمول مندرج در قضیهٔ ۴-۴-۲ و (۴.۱۲) استفاده کنید).

۳ـ اگر $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ ثابت کنید

$$f[y_0, y_1, \ldots, y_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

(*راهنمایی*: از یکتایی چندجمله‌ای درونیاب استفاده کنید).

۴ـ اگر $f(x) = x^{n+1}$ و $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط متمایز x_0 تا x_n باشد ثابت کنید:

(آ) $P(x) = x^{n+1} - (x - x_0) \ldots (x - x_n)$

(ب) $f[x, x_0, \ldots, x_n] = 1$

(پ) $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = x_0 + x_1 + \ldots + x_n.$

* ۴-۵ مینیمم کردن خطای چندجمله‌ای درونیاب

در (۴.۱۶) یک کران بالا برای خطای مطلق $P(x)$، به صورت زیر به‌دست آوردیم

$$|(x - x_0) \ldots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

سؤالی که در اینجا مطرح است این است که آیا می‌توان نقاط درونیابی $x_\circ$، x_1،...، x_n را چنان اختیار کرد که

$$\underset{x\in[a,b]}{\text{Max}} \left| (x-x_\circ)\dots(x-x_n) \right|$$

کمترین مقدار را دارا باشد. خوشبختانه جواب مثبت است و در این قسمت نشان خواهیم داد که اگر $x_\circ$ تا x_n را صفرهای چندجمله‌ای چبیشف $T_{n+1}(x)$ اختیار کنیم، و $a_\circ=-1$ و $b=1$ مقدار بالا مینیمم و مساوی $\frac{1}{2^n}$ خواهد شد.

برای این منظور فرض می‌کنیم تابع f بر $[-1\ ,\ 1]$ تعریف شده باشد. اگر f بر $[a\ ,\ b]$ تعریف شده باشد با تبدیل یک به یک زیر می‌توان $[a\ ,\ b]$ را به $[-1\ ,\ 1]$ تبدیل کرد

$$\Psi:[a,b]\to[-1,1]$$

$$x \rightsquigarrow \left(\frac{2x}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}\right)$$

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که $\Psi(a)=-1$ و $\Psi(b)=1$ و هر مقدار بین a و b به مقداری بین ۱- و ۱ تبدیل می‌شود.

۴ـ۵ـ۱ چندجمله‌ایهای چبیشف

چندجمله‌ایهای چبیشف بر $[-1\ ,\ 1]$ تعریف می‌شوند و با $T_n(x)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.

$$T_n(x)=\cos(n\ \text{arc}\cos x) \tag{۱۷.۴}$$

اگر قرار دهیم

$$x=\cos\theta \tag{۱۸.۴}$$

در این صورت $\theta=\text{arc}\cos x$ و فرمول (۱۷.۴) صورت سادهٔ زیر را پیدا می‌کند.

$$T_n(x)=\cos n\theta \tag{۱۹.۴}$$

با توجه به رابطهٔ مثلثاتی زیر

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta$$

و روابط (۱۸.۴) و (۱۹.۴) به‌دست می‌آوریم:

$$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2x\,T_n(x)$$

ویا

$$T_{n+1}(x)=2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x) \tag{۲۰.۴}$$

از رابطهٔ بازگشتی (۲۰.۴) و به کمک مقادیر زیر

$$T_\circ(x)=1\quad,\quad T_1(x)=x$$

که مستقیماً از (۱۷.۴) به‌دست می‌آیند می‌توان تمام $T_n(x)$ ها را به‌دست آورد. در اینجا چند $T_n(x)$ ارائه می‌شود:

$$T_2(x)=2xT_1(x)-T_0(x)=2x^2-1$$

$$T_3(x)=2xT_2(x)-T_1(x)=4x^3-3x$$

$$T_4(x)=2xT_3(x)-T_2(x)=8x^4-8x^2+1$$

به راحتی، و به کمک استقرا ثابت می‌شود که ضریب جملهٔ پیشرو $T_n(x)$ برابر 2^{n-1} است، به‌عبارت دیگر چندجمله‌ای $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ دارای جملهٔ پیشرو x^n است. ضمناً، اگر n فرد باشد $T_n(x)$ یک تابع فرد و در غیر این صورت یک تابع زوج است (این مطلب با توجه به (۲۰.۴) بدیهی است).

۴-۵-۲ صفرهای چندجمله‌ای $T_n(x)$

با توجه به تعریف (۱۹.۴) از $T_n(x)=\cos n\theta=0$ نتیجه می‌شود:

$$n\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

و یا

$$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

و با توجه به این‌که $x=\cos\theta$، صفرهای $T_n(x)$ چنین به‌دست می‌آیند:

$$x_k=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\quad,\quad k=0,1,\dots,n-1 \tag{۲۱.۴}$$

۴-۵-۳ مثال

صفرهای $T_2(x)$ و $T_3(x)$ را به‌دست آورید.

بنابر (۲۱.۴) صفرهای $T_2(x)$ عبارت‌اند از:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad,\quad x_2=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

این مقادیر با برابر صفر قرار دادن عبارت $T_2(x)=2x^2-1$ نیز به‌دست می‌آیند.

برای تعیین صفرهای $T_3(x)$ داریم:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\quad x_2=\cos\frac{3\pi}{6}=0\quad,\quad x_3=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴-۵-۴ نقاط برگشت $T_n(x)$

برای تعیین نقاط برگشت $T_n(x)$ مشتق آن را به‌دست می‌آوریم

با توجه به این‌که $x=\cos\theta$ داریم $dx=-\sin\theta\, d\theta$. پس،

$$\frac{d\theta}{dx}=-\frac{1}{\sin\theta}$$

و از اینجا،

$$T'_n(x)=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$$

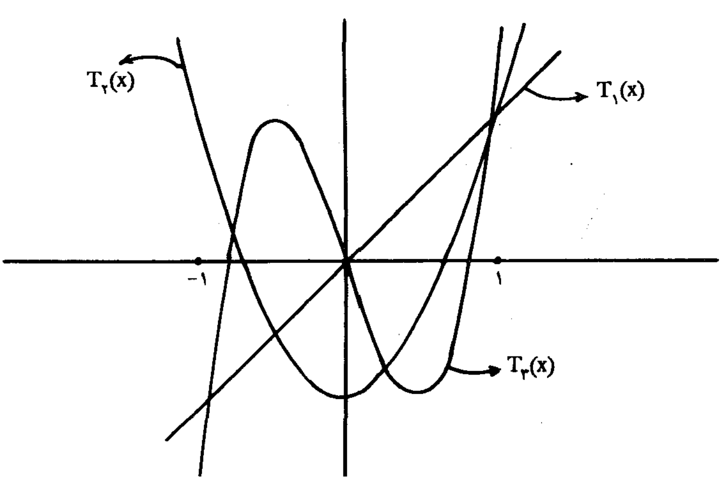
بنابراین، اگر، $\theta_k=\frac{k\pi}{n}$ آن‌گاه $T'_n(x)=0$. بنابراین، نقاطی که در آنها چندجمله‌ای $T_n(x)$ ماکسیمم یا مینیمم می‌شود عبارت‌اند از

و در این نقاط، که بین صفرهای $T_n(x)$ قرار دارند، مقدار $T_n(x)$ عبارت است از

همچنین در نقاط انتهایی $x=-1$ و $x=1$ که به ترتیب $\theta=\pi$ و $\theta=0$ مقادیر $T_n(x)$ برابر $(-1)^n$ و ۱ می‌شود. لذا، $T_n(x)$ در $(n+1)$ نقطهٔ زیر ماکسیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند.

(۲۲.۴)

این نقاط را نقاط اکستریم تابع $T_n(x)$ نیز می‌گویند. در زیر شکل چند $T_n(x)$ را در یک نمودار ملاحظه می‌کنید.



اکنون به مسئله مینیمم کردن خطای $P(x)$ می‌پردازیم.

۴-۵-۵ قضیه

در صورتی که x_0، x_1، ...، x_n صفرهای چندجمله‌ای $T_{n+1}(x)$ باشند

$$\max_{-1\le x\le 1} \left| (x-x_0)\dots(x-x_n) \right|$$

کمترین مقدار را خواهد داشت.

برهان: چون جملهٔ پیشرو $T_{n+1}(x)$ برابر $2^n x^{n+1}$ است و x_0، ...، x_n صفرهای $T_{n+1}(x)$ هستند، داریم:

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$$

پس، کافی است ثابت کنیم بین تمام چندجمله‌ایهای درجهٔ $n+1$ با ضریب جملهٔ پیشرو ۱، چندجمله‌ای $\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$ بر $[-1\ ,\ 1]$ دارای کمترین حداکثر قدرمطلق است، که برابر $\frac{1}{2^n}$ است.

فرض کنید چندجمله‌ای دیگری مانند $Q(x)$، از درجهٔ $n+1$ و با جملهٔ پیشرو x^{n+1}، موجود باشد به‌طوری که

$$\max_{-1\le x\le 1} |Q(x)| < \max_{-1\le x\le 1} \frac{1}{2^n}|T_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$$

چندجمله‌ای $R_n(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$R_n(x)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)-Q(x)$$

واضح است که $R_n(x)$ حداکثر از درجهٔ n است. نشان می‌دهیم که $R_n(x)$ در هریک از $(n+2)$ نقطهٔ اکستریمم $T_{n+1}(x)$ با $T_{n+1}(x)$ هم علامت است. چه اگر $T_{n+1}(x)=1$ آن‌گاه $\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)=\frac{1}{2^n}$ و بنابر (۲۳.۴)

$$Q(x)\le\max_{-1\le x\le 1}|Q(x)|<\frac{1}{2^n}$$

پس

$$\frac{1}{2^n}-Q(x)>0$$

یعنی، $R_n(x)>0$

همچنین اگر $T_{n+1}(x)=-1$ در این صورت

$$R_n(x)=-\frac{1}{2^n}-Q(x) \qquad (۲۴.۴)$$

ولی از (۲۳.۴) داریم

$$|Q(x)| \le \max_{-۱\le x\le ۱} |Q(x)| < \frac{۱}{۲^n}$$

در نتیجه

$$-\frac{۱}{۲^n} < Q(x) < \frac{۱}{۲^n}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$-\frac{۱}{۲^n} - Q(x) < ۰$$

که با توجه به (۲۴.۴) نتیجه می‌شود

$$R_n(x) < ۰$$

پس ثابت شد که چندجمله‌ای $R_n(x)$ در ۲ + n نقطهٔ اکستریم $T_{n+۱}(x)$ با آن هم علامت است. اما، $T_{n+۱}(x)$ در ۲ + n نقطهٔ مذکور متناوباً مثبت و منفی می‌شود، یعنی بین هر دو نقطهٔ متوالی یک صفر دارد، پس $R_n(x)$ لااقل دارای ۱ + n صفر است که این غیرممکن است زیرا $R_n(x)$ حداکثر از درجهٔ n است. ازاین‌رو، اگر $P^*(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در صفرهای $T_{n+۱}(x)$ باشد داریم:

$$\left| f(x) - P^*(x) \right| \le \frac{M_{n+۱}}{۲^n (n+۱)!} \tag{۲۵.۴}$$

که در آن

$$\forall x \in [-۱, ۱] \quad , \quad \left| f^{(n+۱)}(x) \right| \le M_{n+۱}$$

اگر کران بالای خطای $P^*(x)$ با بزرگ شدن n به صفر میل کند $P^*(x)$ تقریب خوبی برای f(x) خواهد بود.

۴ـ۵ـ۶ مثال

چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \sin \frac{\pi x}{۲}$ را در نقاط $x_۰ = -۱$ و $x_۱ = ۱$ به‌دست آورید و حداکثر خطای آن را با چندجمله‌ای درونیاب مبتنی بر صفرهای $T_۲(x)$ مقایسه کنید.

حل: جدول تفاضلات مربوط عبارت است از

x_i	f_i	تفاضل اول
−۱	−۱	
		۱
۱	۱	

و چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از

$$P(x)= -۱ + (x + ۱) \times ۱= x$$

برای تعیین کران بالای $|f(x) - P(x)|$ باید مشتق دوم تابع f را حساب کنیم:

$$f'(x)=\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲} \quad , \quad f''(x)=-\frac{\pi^۲}{۴}\sin\frac{\pi x}{۲}$$

پس،

$$|f''(x)| \leq \frac{\pi^۲}{۴}$$

در نتیجه

$$|f(x)-P(x)| \leq |(x+۱)(x-۱)| \frac{\frac{\pi^۴}{۴}}{۲!}$$

$$=(۱-x^۲) \times \frac{\pi^۲}{۸}$$

اما،

$$\max_{-۱\leq x\leq ۱} (۱ - x^۲)= ۱$$

در نتیجه، همواره

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^۲}{۸}$$

برای مقایسهٔ این کران بالا با خطای $P^*(x)$ ابتدا این چندجمله‌ای را به‌دست می‌آوریم. صفرهای $T_۲(x)$ عبارت‌اند از (به مثال ۴ـ۵ـ۳ رجوع کنید):

$$x_۰=-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad , \quad x_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس جدول تفاضلات چنین است (اعداد تا سه رقم اعشار منظور شده‌اند):

x_i	f_i	تفاضل اول
$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰/۸۹۶−	
		۱/۲۶۷
$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰/۸۹۶	

بنابراین

$$P^*(x)=-۰/۸۹۶+۱/۲۶۷(x+۰/۷۰۷)$$

$$=۱/۲۶۷x-۰/۰۰۰۲۳۱.$$

بنابر (۲۵.۴) خطای P^* حداکثر برابر است با

$$\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2 \times 2!} = \frac{\pi^2}{16}$$

که نصف حداکثر خطای $P(x)$ است.

۴ـ۵ـ۷ خودآزمایی

۱ـ در مورد چندجمله‌ایهای چبیشف ثابت کنید که

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \pi & m = n = 0 \\ 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases}$$

۲ـ چندجمله‌ای درونیاب f، که در جدول زیر آمده‌است، راتعیین کنید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	-1	1

۳ـ تعیین چندجمله‌ای $P^*(x)$، یعنی چندجمله‌ای درونیاب مبتنی بر صفرهای چندجمله‌ای چبیشف، چه مشکلات عملی در بردارد؟

۴ـ برای محاسبهٔ جملات مندرج در یک جدول تفاضلات تقسیم شده، برنامهٔ کامپیوتری بنویسید و جداول مربوط به چند مسئله را با استفاده از آن به‌دست آورید.

۴ـ۶ تفاضلات متناهی

روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن در حالت کلی برای نقاط x_0، x_1، ...، x_n، چه متساوی‌الفاصله باشند چه نباشند، چندجمله‌ای درونیاب را به‌دست می‌دهند. اما، وقتی که x_iها متساوی‌الفاصله باشند فرمولهای ساده‌تری موجودند که در این قسمت سعی می‌کنیم آنها را به‌دست آوریم. برای این منظور فرض می‌کنیم که

$$x_{i+1} - x_i = h \quad , \quad i = 0, \dots, n-1$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$x_i = x_0 + ih \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

اکنون به تعریف چند عملگر می‌پردازیم که در بیان فرمولها به کار می‌روند.

۴-۶-۱ تعریف عملگر انتقال E

علمگر E چنین تعریف می‌شود:

$$Ef_i = f_{i+1}$$

در نتیجه،

$$E^2 f_i = E(Ef_i) = f_{i+2}$$

و اگر k عددی طبیعی باشد،

$$E^k f_i = f_{i+k}$$

با این قرارداد که

$$x_{i+\alpha} = x_0 + (i+\alpha)h$$
$$f_{i+\alpha} = f(x_0 + (i+\alpha)h)$$

می‌توان تعریف بالا را به هر αی حقیقی تعمیم داد:

$$E^\alpha f_i = f_{i+\alpha} \qquad (۲۶.۴)$$

مثلاً

$$E^{-1} f_i = f_{i-1}$$

۴-۶-۲ تعریف عملگر تفاضل پیشرو Δ

عملگر Δ چنین تعریف می‌شود

$$\Delta = E - 1$$

که در نتیجه

$$\Delta f_i = (E-1)f_i = Ef_i - f_i = f_{i+1} - f$$

یعنی،

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

وجه تسمیه پیشرو با توجه به تعریف بالاست.

به همین ترتیب،

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)$$
$$= f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)$$

در نتیجه

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i .$$

در صورتی که k عددی طبیعی باشد داریم

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k(\Delta f_i) = \Delta^k(f_{i+1} - f_i)$$

در نتیجه

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i \qquad (۲۷.۴)$$

که یک فرمول بازگشتی برای محاسبهٔ تفاضلات پیشرو مراتب بالای f_i است.

۴ـ۶ـ۳ تعریف عملگر تفاضل پسرو ∇

عملگر ∇ چنین تعریف می‌شود

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

در نتیجه،

$$\nabla f_i = (1 - E^{-1}) f_i = f_i - E^{-1} f_i = f_i - f_{i-1}$$

پس،

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

چون در تعیین ∇f_i از مقادیر f در x_i و x_{i-1} استفاده می‌شود لفظ پسرو برای این تفاضلات به‌کار می‌رود. در ضمن

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1})\\ &= \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2})\\ &= f_i - 2 f_{i-1} + f_{i-2}\end{aligned}$$

پس،

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2 f_{i-1} + f_{i-2}$$

و به‌طور کلی، اگر k عددی طبیعی باشد

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1} \qquad (۲۸.۴)$$

فرمولهای بالا را طی چند مثال به کار می‌بریم.

۴ـ۶ـ۴ مثال

تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

حل: با توجه به فرمول (۲۷.۴) داریم

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
−۱	۰			
		(−۱ −۰) = −۱		
۰	−۱		۳− (−۱) = ۴	
		۲−(−۱) = ۳		۴−۴ = ۰
۱	۲		۷−۳ = ۴	
		۹−۲ = ۷		
۲	۹			

مشاهده می‌شود که اعداد به‌سادگی حساب می‌شوند و مشکل تفاضلات تقسیم شده را ندارند که باید اعداد تفاضل x_i هانیز تقسیم می‌شد.

۴ـ۶ـ۵ مثال

جدول تفاضلات تابع جدولی زیر را تشکیل دهید

x_i	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳
f_i	۲	۲/۳۳۱	۲/۷۲۸	۳/۱۹۷

حل: مانند مثال قبل داریم:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	۲			
		۰/۳۳۱		
			۰/۰۶۶	
۱/۱	۲/۳۳۱			
				۰/۰۰۶
		۰/۳۹۷		
	۲/۷۲۸		۰/۰۷۲	
۱/۲				
		۰/۴۶۹		
۱/۳	۳/۱۹۷			

جدول زیر با توجه به (۲۷.۴) و (۲۸.۴) تنظیم شده است و نشان می‌دهد که تفاضلات پیشرو در ابتدای جدول و تفاضلات پسرو در انتهای جدول کاربرد دارند.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f_1 - f_0 = \Delta f_0$	$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$	
x_2	f_2	$f_2 - f_1 = \Delta f_1$	$\Delta f_2 - \Delta f_1 = \Delta^2 f_1$	$\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \Delta^3 f_0$
x_3	f_3	$f_3 - f_2 = \Delta f_2$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_{n-3}	f_{n-3}	$f_{n-2} - f_{n-3} = \nabla f_{n-2}$	$\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2} = \nabla^2 f_{n-1}$	$\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} = \nabla^3 f_n$
x_{n-2}	f_{n-2}	$f_{n-1} - f_{n-2} = \nabla f_{n-1}$	$\nabla f_n - \nabla f_{n-1} = \nabla^2 f_n$	
x_{n-1}	f_{n-1}	$f_n - f_{n-1} = \nabla f_n$		
x_n	f_n			

۴ـ۶ـ۵ خودآزمایی

۱ـ فرض کنید f و g دو تابع باشند که در x_0، x_1، ...، x_n به ترتیب مقادیر f_0، f_1، ...، f_n و g_0، g_1، ...، g_n را دارند و $x_i = x_0 + ih$. ثابت کنید:

الف) اگر α و β دو عدد حقیقی ثابت باشند

$$\Delta(\alpha f_i + \beta g_i) = \alpha \Delta f_i + \beta \Delta g_i$$

ب)

$$\Delta(f_i g_i) = f_i \Delta g_i + g_{i+1} \Delta f_i$$

ج) اگر همواره $g_i \neq 0$،

$$\Delta\left(\frac{f_i}{g_i}\right) = \frac{g_i \Delta f_i - f_i \Delta g_i}{g_i g_{i+1}}$$

د) اگر α ثابت و مثبت باشد و $f(x) = \alpha^x$

$$\Delta f_i = (\alpha^h - 1) f_i$$

درچه صورت $\Delta f_i = f_i$؟

۲ـ با توجه به اینکه $\Delta = E - 1$ و $\nabla = 1 - E^{-1}$ ثابت کنید:

$$\nabla^k f_i = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} f_{i+k-r}$$

و

$$\nabla^k f_i = \sum_{r=۰}^{k} (-۱)^r \binom{k}{r} f_{i-r}$$

۳ـ اگر منظور از عملگر $E\Delta$ این باشد که

$$(E\Delta)f_i = E(\Delta f_i)$$

و به همین ترتیب در مورد $E\Delta$ و ∇E، در برقراری تساویهای زیر تحقیق کنید.

$$E\Delta = \Delta E \quad , \quad E\nabla = \nabla E \quad , \quad \Delta\nabla = \nabla\Delta$$

۴ـ۷ کاربرد تفاضلات متناهی

یکی از کاربردهای تفاضلات متناهی تعیین درجهٔ یک چندجمله‌ای مناسب برای تقریب یک تابع جدولی است. در زیر نشان می‌دهیم که اگر تابع f یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد تفاضلات مرتبهٔ nام آن ثابت و تفاضلات مراتب بالاتر آن صفرند. از عکس این مطلب می‌توان برای تعیین یک چندجمله‌ای مناسب برای تقریب زدن با تابع جدولی f استفاده کرد.

۴ـ۷ـ۱ مثال

جدول تفاضلات تابع $f(x) = x^۳$ را برای نقاط

$$x_i = ۰/۱ \times i \quad , \quad i = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

تشکیل دهید و نتیجه را توجیه کنید.

حل: جدول مطلوب چنین است:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$	$\Delta^۴ f_i$
۰	۰				
		۰/۰۰۱			
۰/۱	۰/۰۰۱				
			۰/۰۰۶		
		۰/۰۰۷		۰/۰۰۶	
۰/۲	۰/۰۰۸				
			۰/۰۱۲		
		۰/۰۱۹		۰/۰۰۶	
۰/۳	۰/۰۲۷				
			۰/۰۱۸		
		۰/۰۳۷			
۰/۴	۰/۰۶۴				

مشاهده می‌شود که تفاضلات مرتبهٔ سوم مقدار ثابتی دارند که برابر است با

$$3! \times (0/1)^3 = 0/006$$

و بالطبع تفاضلات مراتب بالاتر صفرند.

اکنون در حالت کلی قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

۴-۷-۲ قضیه

اگر $f(x)=x^n$ آنگاه $\Delta^n f_i = n!\ h^n$ و اگر $m>n$ آنگاه $\Delta^m f_i = 0$ (این قسمت از قضیه نتیجهٔ بدیهی قسمت اول است).

برهان

حکم قضیه را به کمک استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

اگر $n=1$ داریم $f(x)=x$ که در نتیجه

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i = x_{i+1} - x_i = h = 1!\ h^1$$

حال فرض می‌کنیم برای هر تابع $f(x)=x^k$ که $1 \le k \le n$ داشته باشیم

$$\Delta^k f_i = k!\ h^k$$

و اگر $m>k$

$$\Delta^m f_i = 0$$

و تابع $g(x)=x^{n+1}$ را در نظر می‌گیریم

$$\Delta g_i = g_{i+1} - g_i = (x_i + h)^{n+1} - x_i^{n+1}$$

$= (n+1)\ h\ x_i^n +$ (جملاتی که درجهٔ x_i آنها کمتر از n است)

بنابراین،

$$\Delta^{n+1} g_i = \Delta^n (\Delta g_i) = (n+1)\, h\, \Delta^n (x_i^n) + 0$$

$$= (n+1)\, h \times n!\, h^n = (n+1)!\, h^{n+1}$$

در اینجا از فرض استقرا استفاده شده است که تفاضلات مرتبهٔ nام چندجمله‌ایهای از درجهٔ کمتر از n صفر است.

بنابراین، اگر بخواهیم یک چندجمله‌ای جایگزین یک تابع جدولی کنیم، جدول تفاضلات آن را تشکیل می‌دهیم. اگر تفاضلات از مرتبهٔ خاصی مقدار ثابت شدند می‌توان یک چندجمله‌ای به جای تابع قرار داد. البته خطای گرد کردن، در جداولی که اعداد آن تقریبی هستند، مشکل‌زاست و گاهی باید تساوی در حد خطای گرد کردن را مد نظر داشت.

۴ـ۷ـ۳ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع $f(x)= e^x$ را برای

$$x_i= ۰/۱ + i \times ۰/۰۱ \quad , \quad i= ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

تشکیل دهید و درجهٔ چندجمله‌ای مناسب برای تقریب زدن این تابع را به‌دست آورید.

حل: جدول تفاضلات، با منظورکردن اعداد تا ۵ رقم اعشار، چنین است.

x_i	$f(x_i)= e^{x_i}$	تفاضلات اول	تفاضلات دوم	تفاضلات سوم
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷			
		۰/۰۱۱۱۱		
۰/۱۱	۱/۱۱۶۲۸		۰/۰۰۰۱۱	
		۰/۰۱۱۲۲		۰
۰/۱۲	۱/۱۲۷۵۰		۰/۰۰۰۱۱	
		۰/۰۱۱۳۳		۰
۰/۱۳	۱/۱۳۸۸۳		۰/۰۰۰۱۱	
		۰/۰۱۱۴۴		
۰/۱۴	۱/۱۵۰۲۷			

نتایج مندرج در جدول نشان می‌دهد که یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم برای این تابع، در بازهٔ [۰/۱۴ , ۰/۱]، مناسب است.

۴ـ۷ـ۴ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع $f(x)= e^x$ را برای نقاط

$$x_i= ۰/۱ + ۰/۰۵ \times i \quad , \quad i= ۰, ۱, ۲, ۳,..., ۸$$

تشکیل دهید و درجهٔ چندجمله‌ای مناسب برای تقریب زدن با f را به‌دست آورید.

x_i	$f(x_i)= e^{x_i}$	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$
۰/۱۰	۱/۱۰۵۱۷			
		۰/۰۵۶۶۶		
۰/۱۵	۱/۱۶۱۸۳		۰/۰۰۲۹۱	
		۰/۰۵۹۵۷		۰/۰۰۰۱۵
۰/۲۰	۱/۲۲۱۴۰		۰/۰۰۳۰۶	
		۰/۰۶۲۶۳		۰/۰۰۰۱۴
۰/۲۵	۱/۲۸۴۰۳		۰/۰۰۳۲۰	
		۰/۰۶۵۸۳		۰/۰۰۰۱۸
۰/۳۰	۱/۳۴۹۸۶		۰/۰۰۳۳۸	
		۰/۰۶۹۲۱		۰/۰۰۰۱۶
۰/۳۵	۱/۴۱۹۰۷		۰/۰۰۳۵۴	
		۰/۰۷۲۷۵		۰/۰۰۰۲۰
۰/۴۰	۱/۴۹۱۸۲		۰/۰۰۳۷۴	
		۰/۰۷۶۴۹		۰/۰۰۰۱۸
۰/۴۵	۱/۵۶۸۳۱		۰/۰۰۳۹۲	
		۰/۰۸۰۴۱		
۰/۵	۱/۶۴۸۷۲			

خطای موجود در مقادیر e^{x_i} در رقم پنجم اعشار است ولی این خطاها در طول جدول افزایش پیدا می‌کنند. در اینجا گفته می‌شود که تفاضلات مرتبهٔ سوم در حد خطای گرد کردن با هم برابرند. از این‌رو، درجهٔ چندجمله‌ای مناسب ۳ است. این‌که حد خطای گرد کردن برای مراتب مختلف تفاضلات چیست دقیقاً نامعین است ولی یک معیار عملی نادقیق برای نوسانات ناشی از خطای گرد کردن در جدول زیر آمده است.

مرتبهٔ تفاضلات	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حدود خطای مورد انتظار	± ۱	± ۲	± ۳	± ۶	± ۱۲	± ۲۲

۴ـ۷ـ۵ خودآزمایی

۱ـ برای تابع $f(x)= e^x$ (که در جدول ذیل تا ۷ رقم بامعنا داده شده است) یک جدول تفاضلات تشکیل دهید و درجهٔ چندجمله‌ای مناسب آن را به‌دست آورید.

x_i	f_i	x_i	f_i	x_i	f_i
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷۱	۰/۲۵	۱/۲۸۴۰۲۵	۰/۴	۱/۴۹۱۸۲۵
۰/۱۵	۱/۱۶۱۸۳۴	۰/۳	۱/۳۴۹۸۵۹	۰/۴۵	۱/۵۶۸۳۱۲
۰/۲	۱/۲۲۱۴۰۳	۰/۳۵	۱/۴۱۹۰۶۸	۰/۵	۱/۶۴۸۷۲۱

۲ـ آیا برای تابع $f(x)=10^x$ در نقاط

$$x_i = i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3$$

یک چندجمله‌ای مناسب برای تقریب زدن با آن وجود دارد؟

۳ـ روش Δ^2ـ ایتکن برای سرعت بخشیدن به همگرایی دنبالهٔ همگرای $\{x_n\}$ به قرار زیر است

$$x^*_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

ثابت می‌شود اگر $\{x^*_n\}$ به α همگرا باشد داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^*_n - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = c \neq 0$$

یعنی، همگرایی $\{x^*_n\}$ سریعتر از همگرایی $\{x_n\}$ است.

این روش را برای سرعت بخشیدن به همگرایی دنباله‌های زیر به‌کار برید.

الف) $x_{n+1} = \cos x_n \quad , \quad x_0 = 0/5$

ب) $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n} \quad , \quad x_0 = 0/5$

۴ـ۸ فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو

در ۴ـ۳ـ۴ فرمول چندجمله‌ای درونیاب را بر حسب تفاضلات تقسیم شده به‌دست آوردیم. وقتی نقاط متساوی‌الفاصله باشند می‌توان چندجمله‌ای درونیاب را ساده‌تر به‌دست آورد. ضمناً چون هدف اصلی تعیین تقریبی از $f(x)$ به ازای x ی است که در جدول نیست می‌توان از تفاضلات پسرو یا پیشرو، هرکدام مناسبتر است، استفاده کرد. برای این منظور ابتدا یک مثال ذکر می‌کنیم تا آمادگی لازم برای به‌دست آوردن فرمول مورد نظر ایجاد شود.

۴ـ۸ـ۱ مثال

نشان دهید که

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}$$

حل: می‌دانیم که، $x_1 - x_0 = h$، $x_2 - x_1 = h$ و $x_2 - x_0 = 2h$. بنابراین، باتوجه‌به‌تعریف Δf_0،

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

و

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f_1}{h}$$

اما، با توجه به روابط بالا، داریم

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{\frac{\Delta f_0}{h} - \frac{\Delta f_1}{h}}{-2h}$$
$$= \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{2h^2}$$

بنابر (۲۷.۴) داریم

$$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$$

پس،

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

اکنون به‌طورکلی لم زیر را ثابت می‌کنیم.

۴-۸-۲ لم

اگر k عددی طبیعی باشد آن‌گاه به ازای هر $0 \le i$،

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{k!\,h^k} \qquad (۲۹.۴)$$

برهان

به کمک استقرا روی k، حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $k = 1$ داریم

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$$
$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f_i}{h}$$

که همان (۲۹.۴) به‌ازای $k=1$ است. حال فرض کنید (۲۹.۴) به ازای هر $i \geq 0$ برقرار باشد و ثابت می‌کنیم (حکم استقرا) به ازای هر $i \geq 0$

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, x_{i+k+1}\right] = \frac{\Delta^{k+1} f_i}{(k+1)!\, h^{h+1}}$$

برای این منظور از تعریف تفاضلات تقسیم شده استفاده می‌کنیم

$$f\left[x_i, \dots, x_{i+k+1}\right] = \frac{f\left[x_i, \dots, x_{i+k}\right] - f\left[x_{i+1}, \dots, x_{(i+1)+k}\right]}{x_i - x_{i+k+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta^k f_i}{k!\, h^k} - \dfrac{\Delta^k f_{i+1}}{k!\, h^k}}{x_i - x_{i+k+1}} \tag{۳۰.۴}$$

ولی چون $x_j = x_0 + jh$ داریم

$$x_i - x_{i+k+1} = \left(x_0 + ih\right) - \left(x_0 + (i+k+1)h\right) = -(k+1)h$$

از این‌رو، (۳۰.۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$f\left[x_i, \dots, x_{i+k+1}\right] = \frac{\Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i}{(k+1) \times k!\, h^{k+1}}$$

که بنابر (۲۷.۴)،

$$= \frac{\Delta^{k+1} f_i}{(k+1)!\, h^{k+1}}\,.$$

۴ـ۸ـ۳ نتیجه

اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه

$$f\left[x_0, x_1, \dots, x_k\right] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k}$$

۴ـ۸ـ۴ لم

اگر $x = x_i + \theta h$ و k عددی طبیعی باشد آنگاه

$$(x - x_i)\dots(x - x_{k+i}) = h^{k+1}\,\theta(\theta - 1)\dots(\theta - k) \tag{۳۲.۴}$$

برهان

اثبات، به کمک استقرا روی k، ساده است و به عهدهٔ دانشجو واگذار می‌شود.

۴ـ۸ـ۵ قضیه (فرمول تفاضلات پیشرو نیوتن برای چندجمله‌ای درونیاب):

اگر نقاط x_i متساوی‌الفاصله باشند و $x = x_\circ + \theta h$ در این صورت

$$P(x) = f_\circ + \theta \Delta f_\circ + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_\circ + \dots + \frac{\theta(\theta-۱)\dots(\theta-n+۱)}{n!}\Delta^n f_\circ \qquad (۳۳.۴)$$

برهان

بنابر قضیهٔ ۴ـ۳ـ۴ چندجمله‌ای درونیاب عبارت است از:

$$\begin{aligned} P(x) = f_\circ + (x-x_\circ) f[x_\circ, x_۱] + \dots + (x-x_\circ)\dots(x-x_{k-۱}) f[x_\circ, \dots, x_k] \\ + \dots + (x-x_\circ)\dots(x-x_{n-۱}) f[x_\circ, \dots, x_n] \end{aligned} \qquad (۳۴.۴)$$

با توجه به (۳۱.۴) و (۳۲.۴)، به ازای $i = \circ$، داریم

$$\begin{cases} (x-x_\circ)\dots(x-x_{k-۱}) = h^k \theta(\theta-۱)\dots(\theta-k+۱) \\ f[x_\circ, \dots, x_k] = \dfrac{\Delta^k f_\circ}{k!\,h^k} \quad , \qquad k = ۱, ۲, \dots, n \end{cases}$$

در نتیجه، به ازای $k = ۱, ۲, \dots, n$

$$(x-x_\circ)\dots(x-x_{k-۱}) f[x_\circ, \dots, x_k] = \frac{\theta(\theta-۱)\dots(\theta-k+۱)}{k!}\Delta^k f_\circ$$

با استفاده از فرمول بالا، تساوی (۳۳.۴) از فرمول (۳۴.۴) به‌دست می‌آید.

۴ـ۸ـ۶ مثال

فرمول چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را با استفاده از قضیه ۴ـ۸ـ۵ به‌دست آورید.

x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۲	۵	۱۰	۱۷

حل: ابتدا جدول تفاضلات پیشرو را تشکیل می‌دهیم. جدول زیر نشان می‌دهد، گرچه

چهار نقطه داریم، چون $\Delta^۳ f_۰$ برابر صفر است چندجمله‌ای درونیاب از درجهٔ دو است.

جدول (۴ـ۴)

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۲	
		۵		۰
۳	۱۰		۲	
		۷		
۴	۱۷			

با استفاده از فرمول (۳۳.۴) چندجمله‌ای درونیاب، بر حسب θ، عبارت است از:

$$P(x) = f_۰ + \theta \Delta f_۰ + \frac{\theta(\theta - ۱)}{۲!} \Delta^۲ f_۰$$

مقادیر $f_۰$ ، $\Delta f_۰$ و $\Delta^۲ f_۰$ در بالای خط موربی که در جدول (۴ـ۴) کشیده شده قرار دارند. و $x = x_۰ + \theta h$ که با توجه به این‌که

$$h = ۱ \quad , \quad x_۰ = ۱$$

داریم

$$x = ۱ + \theta \qquad (۳۵.۴)$$

بنابراین،

اگر به‌جای θ ، از (۳۵.۴)، قرار دهیم $\theta = x - ۱$ چندجمله‌ای درونیاب بر حسب x به‌دست می‌آید.

$$P(x) = (x - ۱)^۲ + ۲\,(x - ۱) + ۲ = x^۲ + ۱ \,.$$

فرمول (۳۳.۴) چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_۰$ ، $x_۱$ ،...، x_n را برحسب تفاضلات پیشرو مبتنی بر نقطهٔ $x_۰$ ارائه می‌دهد. در حالت کلی می‌توان فرمول چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط

x_i، x_{i+1}، ...، x_{i+k} را به‌طریقی مشابه به‌دست آورد.

۴ـ۸ـ۷ قضیه

چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط متساوی‌الفاصلهٔ x_i، ...، x_{i+k} عبارت است از:

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-k+1)}{k!} \Delta^k f_i \quad (۳۶.۴)$$

که در آن $x = x_i + \theta h$

برهان

اثبات فرمول (۳۶.۴) نظیر اثبات فرمول (۳۳.۴) و با استفاده از (۲۹.۴) و (۳۲.۴) است.

۴ـ۸ـ۸ مثال

چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط x_i و x_{i+1} را به دست آورید.

حل: بنابر (۳۶.۴) داریم:

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i \quad (۳۷.۴)$$

به سادگی می‌توان، مستقیماً، نشان داد که

$$P(x_i) = f_i$$

و

$$P(x_{i+1}) = f_{i+1}$$

زیرا، اگر $x = x_i$ آن‌گاه از $x = x_i$ آنگاه از $x = x_i + \theta h$ معلوم می‌شود $\theta = 0$ که اگر در (۳۷.۴) قراردهیم حاصل می‌شود $P(x_i) = f_i$. اگر قراردهیم $x = x_{i+1}$ آن‌گاه $x_{i+1} = x_i + \theta h$ معلوم می‌شود که $\theta = 1$ که اگر در (۳۷.۴) قراردهیم به دست می‌آوریم:

$$P(x_{i+1}) = f_i + \Delta f_i = f_i + (f_{i+1} - f_i) = f_{i+1}$$

۴ـ۸ـ۹ مثال

چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط x_i، x_{i+1}، x_{i+2} را بنویسید.

حل: بنابر (۳۶.۴) داریم:

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_i \quad (۳۸.۴)$$

به سادگی می‌توان مستقیماً نشان داد که

$$P(x_i) = f_i \,,\; P(x_{i+1}) = f_{i+1} \,,\; P(x_{i+2}) = f_{i+2}$$

در صورتی که تفاضلات از مرتبهٔ خاصی برابر باشد چندجمله‌ای درونیاب را می‌توان با iهای متفاوت به دست آورد. به مثال زیر توجه کنید.

۴ـ۸ـ۱۰

چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مثال ۴ـ۸ـ۶ را بر اساس نقطهٔ x_1 به دست آورید.

حل: چون $x_1=۲$ داریم:

$$P(x)=f_1+\theta\Delta f_1+\frac{\theta(\theta-۱)}{۲}\Delta^۲ f_1$$

مقادیر f_1 ، Δf_1 و $\Delta^۲ f_1$ در زیر خط موربی که در جدول (۴ـ۴) کشیده شده است قراردارند و از آنجا

$$P(x)=۵+۵\theta+\frac{\theta(\theta-۱)}{۲}\times ۲=\theta^۲+۴\theta+۵$$

که در آن $x=x_1+\theta h=۲+\theta$. لذا، اگر قراردهیم

$$\theta=x-۲$$

خواهیم داشت:

$$P(x)=(x-۲)^۲+۴(x-۲)+۵=x^۲+۱$$

که همان $p(x)$ قبلی است.

سؤالی که در اینجا مطرح است این است که وقتی $P(x)$ به چند طریق قابل بیان است کدام صورت عملاً مفیدتر است؟ جواب این است که با توجه به این که

$$x=x_i+\theta h$$

داریم

$$\theta=\frac{x-x_i}{h}$$

لذا x_i را چنان اختیار می‌کنیم که θ، از نظر قدرمطلق، کمترین مقدار را داشته باشد، به عبارت دیگر x_i را آن نقطهٔ جدولی اختیار می‌کنیم که کمترین فاصله را تا x داده شده داشته باشد. مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.

۴ـ۸ـ۱۱ مثال

جدول زیر مربوط به $f(x)=\sin x$ برای $x=۰°, ۱۰°, ..., ۵۰°$ است. مطلوب است برآورد $\sin ۵°$ با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب.

x_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
$\sin x_i$	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

حل: جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی f چنین است:

x_i	$\sin x_i$	Δf_i	$\Delta^{۲} f_i$	$\Delta^{۳} f_i$	$\Delta^{۴} f_i$	$\Delta^{۵} f_i$
۰°	۰					
		۰/۱۷۳۶				
۱۰°	۰/۱۷۳۶		−۰/۰۰۵۲			
		۰/۱۶۸۴		−۰/۰۰۵۲		
۲۰°	۰/۳۴۲۰		−۰/۰۱۰۴		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۵۸۰		−۰/۰۰۴۸		۰
۳۰°	۰/۵		−۰/۰۱۵۲		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۴۲۸		−۰/۰۰۴۴		
۴۰°	۰/۶۴۲۸		−۰/۰۱۹۶			
		۰/۱۲۳۲				
۵۰°	۰/۷۶۶۰					

چون $x=۵°$ می‌توان از $x=۰°$ یا $x_۱=۱۰°$ استفاده کرد.
ما قرارمی‌دهیم

$$x_۰=۰°$$

در نتیجه

$$\theta=\frac{x-x_۰}{h}=\frac{۵-۰}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

و داریم

$$\sin ۵° \simeq ۰+\frac{۱}{۲}\times ۰/۱۷۳۶+\frac{\frac{۱}{۲}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{۲}\times(-۰/۰۰۵۲)$$
$$+\frac{\frac{۱}{۲}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)\times\left(-\frac{۳}{۲}\right)}{۶}\times(-۰/۰۰۵۲)$$
$$+\frac{\frac{۱}{۲}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)\times\left(-\frac{۳}{۲}\right)\times\left(-\frac{۵}{۲}\right)}{۲۴}\times(۰/۰۰۰۴)=۰/۰۸۷۱$$

مقدار واقعی $\sin ۵°$ برابر ۰/۰۸۷۲ است (تا چهار رقم اعشار).

۴ـ۸ـ۱۲ خودآزمایی

۱ـ با استفاده از تابع جدولی مثال ۴ـ۸ـ۱۲ تقریبهایی از $\sin 3^\circ$ و $\sin 11/5375^\circ$ را حساب کنید.

۲ـ با استفاده از جدول تفاضلات مثال ۴ـ۷ـ۴ تقریبهایی از $e^{0/12}$ و $e^{0/18}$ را حساب کنید.
(تفاضلات مرتبهٔ سوم را، در حد خطای گردکردن، مساوی تلقی کنید.)

۳ـ جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را تشکیل دهید و چندجمله‌ای درونیاب f را مبتنی بر x_0،x_1 و x_2 حساب کنید (در صورتی که درست عمل کنید $P(x)$، بر حسب x، در هر حالت یکسان است.)

x_i	−۱	۰	۱	۲	۳
f_i	−۱	۱/۲	۱/۴	−۰/۴	−۴/۲

۴ـ خطای چندجمله‌ایهای درجهٔ اول و درجهٔ دوم مندرج در (۳۷.۴) و (۳۸.۴) را به دست آورید.

۴ـ۹ فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار $f(x)$، وقتی x نزدیک به انتهای جدول تفاضلات است، لازم است که از تفاضلات پسرو، که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شوند، استفاده کنیم.

۴ـ۹ـ۱ قضیه

چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_n، x_{n-1}، ...، x_1، x_0 عبارت است از:

$$P(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \dots + \frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \qquad (۳۹.۴)$$

و فرمول چند جمله‌ای درونیاب f برحسب تفاضلات پسرو، در x_i، ...، x_{i-k+1} عبارت است از

$$P(x) = f_i + \theta \nabla f_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+k-1)}{k!}\nabla^k f_i \qquad (۴۰.۴)$$

برهان

برای اثبات فرمولهای بالا به [۲] صفحهٔ ۱۰۷ مراجعه کنید.

۴ـ۹ـ۲ مثال

با استفاده از جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی مثال ۴ـ۸ـ۱۱ تخمینی از $\sin 45^\circ$ حساب کنید.

حل: قرار می‌دهیم $x_i = x_4 = 40^\circ$ در نتیجه

$$\theta = \frac{x - x_i}{h} = \frac{45 - 40}{10} = \frac{1}{2}$$

و با قراردادن $i=4$ در فرمول (۴.۴۰) و کمک گرفتن از اعدادی که در بالای خط مورب کشیده شده در جدول مثال ۴ـ۸ـ۱۱ قراردارند، داریم:

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &\simeq 0{,}6428 + \frac{1}{2}\times(0{,}1428) + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{2}\times(-0{,}0152)\\ &+ \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}}{6}\times(-0{,}0048) + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}}{24}\times(0{,}0004)\\ &= 0{,}7071\end{aligned}$$

که این عدد همان $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یعنی $\sin 45^\circ$، تا ۴ رقم اعشار است.

۴ـ۹ـ۳ خودآزمایی

۱ـ با استفاده از جدول تفاضلات مثال ۴ـ۸ـ۱۱ تخمینی از $\sin 48^\circ$ و تخمینی از $\sin 42^\circ$ را حساب کنید.

۲ـ چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی تمرین ۳ از ۴ـ۸ـ۱۲ را با استفاده از فرمول (۴.۴۰) و نقاط x_4 و x_3 به دست آورید.

۳ـ با استفاده از جدول تفاضلات مثال ۴ـ۷ـ۴ تقریبهایی از $e^{0{,}42}$ و $e^{0{,}315}$ را حساب کنید.

۴ـ۱۰ درونیابی معکوس

تا کنون با معلوم بودن x مقدار $f(x)$ را برآورد کردیم. اگر منظور تخمین مقداری از x باشد به طوری که $f(x)$ مقدار معلومی داشته باشد این کار درونیابی معکوس نامیده می‌شود.

درونیابی معکوس کاربردهایی نیز دارد. به عنوان مثال، می‌توان ریشه‌های $f(x)=0$ را به

وسیلهٔ درونیابی معکوس تخمین زد، به این ترتیب که x ی را به دست می‌آوریم که f(x) برابر صفر باشد. همچنین اگر جمعیت را در فاصله زمانهای معینی داشته باشیم و بخواهیم حدود سالی را تعیین کنیم که جمعیت تعداد مشخصی باشد از درونیابی معکوس استفاده می‌شود.

برای جلوگیری از اطاله کلام تنها یک روش برای تخمین x ، به کمک داشتن f(x)، را که همانا روش تفاضلات تقسیم شده است ارائه می‌کنیم، برای مطالعهٔ بیشتر به [۲] و [۶] مراجعه کنید.

۴ـ۱۰ـ۱ تبدیل درونیابی معکوس به درونیابی مستقیم

اگر

$$y=f(x)$$

و f تابع معکوس داشته باشد داریم

$$x=f^{-1}(y)$$

لذا، به جای جدول

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

می‌توان جدول زیر را در نظر گرفت

f_i	f_0	f_1	f_2	...	f_n
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n

با توجه به این که معمولاً فاصلهٔ f_iها یکسان نیست و انتخاب آنها نیز در اختیار ما نیست نمی‌توان از فرمولهای پیشرو و پسرو نیوتن استفاده کرد. از این‌رو، تنها روش مؤثر که همواره قابل استفاده است جدول تفاضلات تقسیم شده است که در آن نقش x_iها و f_iها عوض شده است.

۴ـ۱۰ـ۲ مثال

جدول زیر در مورد تابع $f(x)=\sin x$ در دست است x ی را تعیین کنید که به ازای آن $f(x)=0/2$.

x_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
f_i	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

حل: جدول تفاضلات تقسیم شدهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم، توجه کنید که f(x)ها طوری قرارگرفته‌اند که |f(x) − ۰/۲| صعودی باشد، این عمل برای کم کردن خطای گرد کردن لازم است و باید همیشه صورت گیرد.

تفاضلات تقسیم شدهٔ:

f_i	x_i	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
۰/۱۷۳۶	۱۰					
		۵۹/۳۸				
۰/۳۴۲۰	۲۰		۵/۱۸			
		۵۸/۴۸		۱۳/۶۰		
۰	۰		۹/۶۲		۱۳/۳۸	
		۶۰/۰۰		۱۹/۸۸		۳۴/۸۶
۰/۵	۳۰		۱۵/۶۰		۳۴/۰۳	
		۷۰/۰۳		۳۴/۳۱		
۰/۶۴۲۸	۴۰		۴۱/۸۸			
		۸۱/۱۷				
۰/۷۶۶	۵۰					

با استفاده از قضیه ۴ـ۳ـ۴ داریم

$$\begin{aligned} x \simeq\ & ۱۰ + (۰/۲-۰/۱۷۳۶) \times ۵۹/۳۸ + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰) \times ۵/۱۸ \\ & + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰) \times ۱۳/۶۰ \\ & + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰)(۰/۲-۰/۵) \times ۱۳/۳۸ \\ & + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰)(۰/۲-۰/۵)(۰/۲-۰/۶۴۲۸) \times ۳۴/۸۶ \\ =\ & ۱۰ + ۱/۵۶۷۶ - ۰/۰۱۹۴ - ۰/۰۱۰۲ + ۰/۰۰۳۰ - ۰/۰۰۳۵ \\ =\ & ۱۱/۵۳۷۵ \end{aligned}$$

بنابراین، جواب تقریباً ۱۱/۵۳۷۵ درجه است.

یکی از راههای امتحان جواب فوق این است که به وسیلهٔ درونیابی مستقیم مقدار $f(۱۱/۵۳۷۵)$ رابرآوردکنیم‌وببینیم ۰/۲ می‌شودیانه(این‌کار رادرتمرین ۱از۴ـ۸ـ۲ ۱انجام داده‌اید).

۴ـ۱۰ـ۳ مثال

جدول زیر مفروض است. تخمینی از صفر این تابع را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۱/۵	-۱	۲/۵	۱۵

حل: جدول تفاضلات زیر را با توجه به فاصلهٔ f_iها تا صفر تشکیل می‌دهیم.

تفاضلات تقسیم شدهٔ:

f_i	x_i	اول	دوم	سوم
-۱	۱			
		۲		
-۱/۵	۰		-۰/۴۲۸۶	
		۰/۵		۰/۰۲۵۲
۲/۵	۲		-۰/۰۲۵۵	
		۰/۰۸		
۱۵	۳			

بنابراین،

$$
\begin{aligned}
x &\simeq ۱ + (۰+۱)\times ۲ + (۰+۱)(۰+۱/۵)\times(-۰/۴۲۸۶) \\
&\quad + (۰+۱)(۰+۱/۵)(۰-۲/۵)\times ۰/۰۲۵۲ \\
&= ۱+۲ - ۰/۶۴۲۹ - ۰/۰۹۴۵ \\
&= ۲/۲۶۲۶
\end{aligned}
$$

مشاهده می‌شود که جواب به دست آمده بسیار نادقیق است، زیرا $f(۱)=-۱$ و $f(۲)=۲/۵$ که قاعدتاً ریشه باید بین ۱ و ۲ باشد! نه بیش از ۲. علت این امر آن است که فاصلهٔ بین xهای جدول زیاد است. در صورتی که فاصله بین xها راکمتر بگیریم دقت جواب زیاد خواهد شد.

۴ـ۱۰ـ۴ خودآزمایی

۱ـ با استفاده از جدول زیر تقریبی از صفر تابع f به دست آورید.

x_i	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳
f_i	۱/۲۵−	۰/۸۷۶−	۰/۳۳۸	۰/۳۸۸

۲ـ با استفاده از درونیابی مستقیم جواب تمرین ۱ را امتحان کنید.

۴ـ۱۱ برازش منحنی[1]

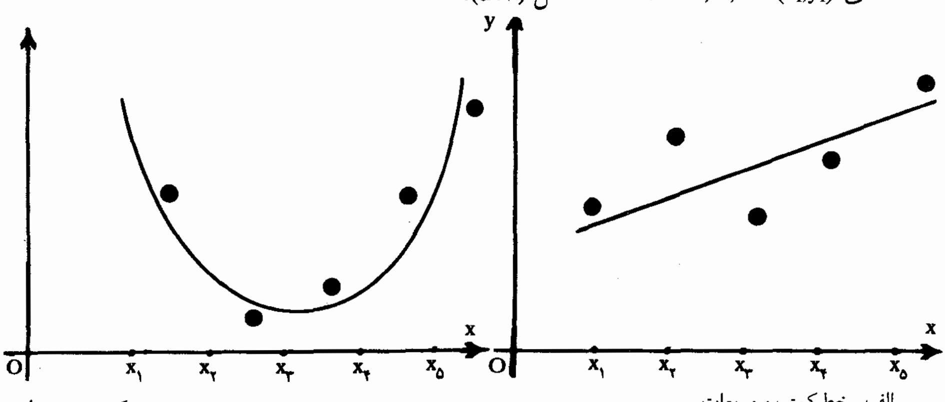
واقعیت این است که مقادیر f_i در یک تابع جدولی تقریبی هستند زیرا از طریق اندازه‌گیری یا آزمایش به دست می‌آیند. بنابراین، اصرار در این که چندجمله‌ای درونیاب در نقاط x_i مقدار f_i را داشته باشد بیهوده است. در عمل اکثراً نقاط جدولی را به وسیلهٔ یک منحنی چنان برازش می‌کنند که خطا به نوعی حداقل باشد.

۴ـ۱۱ـ۱ تعریف

فرض کنید نقاط (x_i,y_i)، $i=1,2,\dots,n$، مفروض باشند. و چند جمله‌ای $P(x)$ چنان باشد که

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-P(x_i)\right)^2 \qquad (۴۱.۴)$$

کمترین مقدار را داشته باشد. در این صورت $P(x)$ را *چندجمله‌ای تقریب کمترین مربعات*[2] برای داده‌های (x_i,y_i)، $i=1,\dots,n$، نامند شکل (۵.۴).



شکل ۴ـ۵

1. Curve fitting
2- Least square

در حالت کلی برای به دست آوردن $P(x)$ فرض کنید که

$$P(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+ a_0 , \quad (a_m\neq 0)$$

چندجمله‌ای کمترین مربعات درجهٔ m باشد. برای به دست آوردن ضرایب $P(x)$، با توجه به (۴۱.۴) قرارمی‌دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 , \; j=0,1,...,m. \tag{۴۲.۴}$$

معادلات (۴۲.۴) تشکیل یک دستگاه شامل $m+1$ معادله برای $m+1$ مجهول a_0 ، a_1، ... ، a_m می‌دهد.

۴ـ۱۱ـ۲ خط کمترین مربعات

یکی از متداولترین روشهای برازش منحنی انتخاب خط کمترین مربعات برای برازش n نقطهٔ مفروض (x_1,y_1)، ... ، (x_n,y_n) است. در این روش

$$P(x) = ax+b \tag{۴۳.۴}$$

و باید a و b را چنان تعیین کرد که

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i+b)\right]^2$$

مینیمم باشد. از این‌رو، قرارمی‌دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

اما داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n} - 2x_i\left[y_i - (ax_i+b)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n} - 2\left[y_i - \left(ax_i+b\right)\right] = 0 \end{cases} \tag{۴۴.۴}$$

پس از ساده کردن، معادلات (۴۴.۴) دستگاه زیر را نتیجه می‌دهند

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right) a + n\, b = \sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$$

از دستگاه بالا مقادیر a و b به دست می‌آیند که توسط آنها خط کمترین مربعات $y=ax+b$ مشخص می‌شود.

۴ـ۱۱ـ۳ مثال

خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدولی زیر را تعیین کنید

x_i	-۲	-۱	۰	۱	۲
f_i	۰	۱	۲	۲	۳

حل: در این مثال داریم:

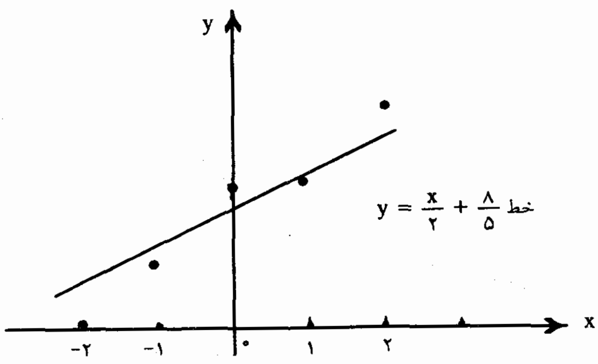
$$n=۵,\quad \sum_{i=۱}^{۵} x_i=۰,\quad \sum_{i=۱}^{۵} x_i^{۲}=۱۰,\quad \sum_{i=۱}^{۵} x_i y_i=۵,\quad \sum_{i=۱}^{۵} y_i=۸$$

بنابراین،

$$\begin{cases} ۱۰a=۵ \\ ۵b=۸ \end{cases}$$

که از آن نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۸}{۵}$.

خط کمترین مربعات و نقاط جدول بالا، در شکل زیر نشان داده شده است.



۴ـ۱۱ـ۴ خودآزمایی

۱ـ برای مثال ۴ـ۱۰ـ۳ مقدار زیر را حساب کنید.

$$S=\sum_{i=۱}^{۵}\left[y_i-\left(\frac{x_i}{۲}+\frac{۸}{۵}\right)\right]^{۲}$$

۲ـ خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدولی زیر را تعیین کنید.

x_i	−۳	−۲	+۱	۲	۳
y_i	۱	۳	۰	۲	۵

۳ـ خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدولی زیر را تعیین کنید و مقدار مینیمم S را به دست آورید.

x_i	−۱	۰	۱	۲	۳
y_i	−۰/۹	۰/۳	۱/۶	۲/۸	۴

۴ـ چندجمله‌ای کمترین مربعات مربوط به شکل $P(x) = ax^2+b$ را برای جدول داده‌های زیر به دست آورید.

x_i	−۲	−۱	۰	۱	−۲
y_i	۵/۵	۲/۵	۲	۲/۵	۵/۵

۴-۱۲ تمرینهای تستی

برای پاسخگویی به هر تست، به طور متوسط، دو دقیقه منظور شده است.

۱ـ اگر $f(0)=1$ و $f(1)=\frac{3}{2}$ مقدار تقریبی $f(\frac{1}{2})$، به کمک درونیابی، کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۲ـ تابع جدولی زیر مفروض است

x_i	−۱	۱	۲	۳
f_i	−۱/۲	۳/۲	۱/۲	۳۱/۲

مقدار $f[-1,1,2]$ کدام است؟

۱) $-1/4$　۲) $\frac{-5/8}{3}$　۳) $\frac{58}{30}$　۴) $1/4$

۳ـ مقدار $f[1,2,3]$ برای تابع جدولی سؤال ۲ کدام است؟

۱) ۱۲　۲) ۶　۳) ۴　۴) هیچکدام

۴ـ در چه صورت چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط متمایز $x_0, x_1, ..., x_n$ خود تابع f است؟

۱) f یک چندجمله‌ای باشد　۲) f یک چندجمله‌ای درجهٔ $(n+1)$ باشد

۳) f یک تابع کراندار باشد　۴) f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ n باشد

۵ـ اگر $f(x)=x^{n+1}$، چه شرطی لازم است تا چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, ..., x_n$ درجه‌ای کمتر از n داشته باشد؟

۱) نقاط متساوی الفاصله باشند　۲) $x_0+x_1+...+x_n=0$

۳) $x_0 x_1 ... x_n=0$　۴) $x_0+x_1+...+x_n=n$

۶ـ از لحاظ محاسباتی کدام یک از عبارات زیر در درونیابی $f(x)$ به وسیلهٔ چندجمله‌ای صحیح است؟

۱) با افزایش تعداد نقاط درونیابی همواره تقریب بهتری برای $f(x)$ می‌توان به دست آورد.
۲) با افزایش درجهٔ چندجمله‌ای همیشه جواب تقریبی بهتری برای $f(x)$ حاصل می‌شود.
۳) معمولاً با افزایش درجهٔ چندجمله‌ای دقت درونیابی در نقاط انتهایی کاهش می‌یابد.
۴) درونیابی به وسیلهٔ تابع نمایی به جای چندجمله‌ای دقت بیشتری دارد.

۷ـ با توجه به جدول

x_i	-1	4	-6	2
f_i	20	70	120	80

کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $f[۴,-۶,۲]=۰$
۲) $f[-۱,۴,-۶]=۰$
۳) $f[۴,-۶,۲]=-۵$
۴) $f[-۱,۴,-۶]=-۵$

۴-۱۳ مسائل تکمیلی

مسائل زیر در کنکور کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی سالهای قبل مطرح شده‌اند.

۱ـ ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = x^k, k = 0, 1, \ldots, n$$

که در آن $L_i(x)$ چندجمله‌ای لاگرانژ مربوط به نقاط درونیاب متمایز x_0، x_1، ...، x_n است.

۲ـ فرض کنید $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ بر $[0,1]$ تعریف شده باشد و

$$x_i = \frac{i}{n} \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

و $P_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0، x_1، ...، x_n باشد. آیا $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. (برای ادعای خود دلیل بیاورید)

۳ـ تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده است (a و b حقیقی‌اند). فرض کنید عدد ثابت و مثبت m وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \in N$ و هر x از $[a,b]$ داشته باشیم

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le m$$

الف) اگر $P_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط متمایز x_0، x_1، ...، x_n از $[a,b]$ باشد ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x).$$

ب) چنانچه $f(x)=e^x$ و $x \in [0,1]$. اگر تابع $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط متمایز x_0، x_1، ...، x_n باشد حدود n را چنان تعیین کنید که خطای درونیابی همواره از 10^{-3} کمتر شود.

۵

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

مقدمه

در ابتدای این فصل روشهای پیدا کردن تقریبهایی برای $f'(x)$، به ازای مقادیر مختلف x را ارائه کنیم. سپس به تعیین تقریب برای

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

می‌پردازیم. همان‌گونه که می‌دانید توابع فراوانی موجودند که تابع اولیه ندارند، یعنی تابعی چون $F(x)$ نیست که به ازای $a \leq x \leq b$

$$F'(x) = f(x).$$

از این رو، محاسبهٔ این انتگرالها با روش عادی امکان‌پذیر نیست. از این جمله‌اند انتگرالهای زیر که اغلب کاربردهای عملی دارند.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-(\sin k)^2 \sin^2 x}}$$

(انتگرال بیضوی)

در این فصل روشهایی ارائه می‌کنیم که به وسیلهٔ آنها می‌توان تقریبی از یک انتگرال معین را تا هر

درجهٔ دقت حساب کرد (البته در حد دقتی که وسایل محاسباتی دارند).

هدفهای کلی

۱. روشهای برآورد $f'(x)$ به ازای x های مختلف و تعیین خطای آن
۲. بیان اشکالات مشتقگیری
۳. شرح قاعدهٔ ذوزنقه‌ای برای برآورد یک انتگرال معین و تعیین خطای آن
۴. شرح قاعدهٔ سیمون و تعیین خطای آن
۵. شرح قاعدهٔ رامبرگ و کاربرد آن
۶. شرح منشأ قواعد انتگرالگیری و ارائهٔ فرمولهای نیوتن ـ کاتس و گاوس
۷. تخمین بعضی انتگرلهای ناسره

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند :

۱. تخمینی از $f'(x)$، وقتی x و تابع جدولی f معلوم است ، را حساب کند.
۲. روشهای انتگرالگیری مناسب را برای برآورد یک انتگرال معین به کار برد و تقریبی از یک انتگرل را حساب کند که خطایی کمتر از ε مفروض داشته باشد.
۳. تقریبی از انتگرالهای ناسره را به کمک روشهای خوانده شده حساب کند.

۵ مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

کاربرد مشتق و انتگرال در ریاضیات مهندسی و دیگر علوم فراوان است، و در حل اکثر مسائل از آنها استفاده می‌شود. در آنالیز، که معمولاً ضابطه یا ضابطه‌هایی برای تعریف تابع ارائه می‌شود، فرمولهایی نیز برای محاسبهٔ مشتق و انتگرال، به شرط وجود، به دست می‌آید. اما، اگر تابع موردنظر بسیار پیچیده باشد یا با تابعی جدولی سروکار داشته باشیم (که فرض می‌شود جدول مذکور از یک تابع مشتق‌پذیر یا انتگرال‌پذیر، ناشی شده است) باید به روشهای عددی روی آورد.

۵ـ۱ مشتقگیری عددی

برای مشتقگیری عددی، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، از چندجمله‌ای درونیاب استفاده می‌کنیم. در (۳۶.۴) چند جمله‌ای درونیاب f در x_i ، x_{i+1} ، ... ، x_{i+k} را چنین به دست آوردیم:

$$p(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{r!}\Delta^2 f_i + \frac{\theta(\theta-1))(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_i + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)}{4!}\Delta^4 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-k+1)}{k!}\Delta^k f_i \qquad (1.5)$$

که در آن، $x=x_i+\theta h$ و $x_{i+1}-x_i=h$ برای $i=0,1,\dots,n-1$. چون $P(x)$ برحسب θ ارائه شده است می‌نویسیم

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} \qquad (2.5)$$

اما داریم، $dx=hd\theta$ که در نتیجه

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h} \qquad (3.5)$$

بنابراین، با مشتقگیری از (۱.۵) و در نظر گرفتن (۲.۵) و (۳.۵)

$$f'(x \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_i + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_i + \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{2} + \frac{5\theta}{12} - \frac{1}{2}\right)\Delta^4 f_i \dots\right] \qquad (4.5)$$

اگر قرار دهیم $\theta=0$، با توجه به $x=x_i+\theta h$، داریم $x=x_i$ و از (۴.۵) نتیجه می‌شود

$$f'(x_i) = f'_i \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \frac{1}{2}\Delta^4 f_i + \dots\right)$$

معمولاً برای محاسبهٔ تقریبی از f'_i یک یا چندجمله‌ای از سمت راست انتخاب می‌شود.

مثلاً،

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (5.5)$$

و یا

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right] = \frac{1}{h}\left[f_{i+1} - f_i - \frac{1}{2}\left(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\right)\right],$$

که در نتیجه

$$f'_i \simeq \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \qquad (6.5)$$

ضمناً، اگر قراردهیم $\theta=\frac{۱}{۲}$، با توجه به $x=x_i+\theta h$ به دست می‌آوریم $x=x_i+\frac{۱}{۲}h$ و از (۴.۵) نتیجه می‌شود:

$$f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)\simeq\frac{۱}{h}\left(\Delta f_i-\frac{۱}{۲۴}\Delta^۳ f_i+\frac{۱}{۴۸}\Delta^۴ f_i+\dots\right)$$

از این رو، اگر تنها جملهٔ اول داخل پرانتز سمت راست را انتخاب کنیم:

$$f'(x_i+\frac{h}{۲})\simeq\frac{\Delta f_i}{h}=\frac{f_{i+۱}-f_i}{h} \qquad (۷.۵)$$

و اگر دو جملهٔ اول را منظور کنیم

$$f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)\simeq\frac{۱}{h}\left(\Delta f_i-\frac{۱}{۲۴}\Delta^۳ f_i\right) \qquad (۸.۵)$$

۵-۱-۱ مثال

با توجه به جدول زیر تقریبی از f'_i، $i=۰،۱،۲،۳$ را یک بار با استفاده از فرمول (۵.۵) و بار دیگر با استفاده از (۶.۵) حساب کنید.

x_i	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳
f_i	۱/۱۰۵۱۷	۱/۱۶۱۸۳	۱/۲۲۱۴۰	۱/۲۸۴۰۳	۱/۳۴۹۸۶

حل: جدول تفاضلات f را با توجه به جدول بالا تشکیل دهیم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷			
		۰/۰۵۶۶۶		
۰/۱۵	۱/۱۶۱۸۳		۰/۰۰۲۹۱	
		۰/۰۵۹۵۷		۰/۰۰۰۱۵
۰/۲	۱/۲۲۱۴۰		۰/۰۰۳۰۶	
		۰/۰۶۲۶۳		۰/۰۰۰۱۴
۰/۲۵	۱/۲۸۴۰۳		۰/۰۰۳۲۰	
		۰/۰۶۵۸۳		
۰/۳	۱/۳۴۹۸۶			

از این‌رو، با توجه به فرمولهای (۵.۵) و (۶.۵) داریم ($h = ۰/۰۵$):

f_i	$f'_i \simeq \dfrac{\Delta f_i}{h}$	$f'_i \simeq \dfrac{\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i}{h}$
۱/۱۰۵۱۷	۱/۱۳۳۲	۱/۱۰۴
۱/۱۶۱۸۳	۱/۱۹۱۴	۱/۱۶۰۸
۱/۲۲۱۴۰	۱/۲۵۲۶	۱/۲۲۰۶
۱/۲۸۴۰۳	۱/۳۱۶۶	—

اعداد f_i که در این مثال داده شده‌اند مربوط به تابع $f(x)=e^x$ هستند که مشتق آن با خودش برابر است. بنابراین، در جدول اخیر، باید اعداد موجود در هر سه ستون یکسان باشند! که نیستند. البته مشاهده می‌شود اعدادی که از فرمول (۶.۵) به دست آمده‌اند، دقیقتر از اعدادی هستند که از (۵.۵) به دست می‌آیند.

۵ـ۱ـ۲ مثال

با توجه به تابع جدولی مثال (۵ـ۱ـ۱) تقریبهایی از $f'(x_i+\frac{h}{۲})$، با به کار بردن (۷.۵) و (۸.۵) حساب کنید.

حل: با توجه به جدول تفاضلاتی که در مثال (۵ـ۱ـ۱) به دست آوردیم، داریم:

$x_i + \frac{h}{۲}$	$f\left(x_i + \frac{h}{۲}\right)$	$f'\left(x_i + \frac{h}{۲}\right) \simeq \frac{\Delta f_i}{h}$	$f'\left(x_i + \frac{h}{۲}\right) \simeq \frac{\Delta f_i - \frac{۱}{۲۴}\Delta^۳ f_i}{h}$
۰/۱۲۵	۱/۱۳۳۱۵	۱/۱۳۳۲	۱/۳۳۸۰
۰/۱۷۵	۱/۱۹۱۲۵	۱/۱۹۱۴	۱/۱۹۱۲۸
۰/۲۲۵	۱/۲۵۲۳۲	۱/۲۵۲۶	—
۰/۲۷۵	۱/۳۱۶۵۳	۱/۳۱۶۶	—

در جدول بالا دو ستون از سمت چپ فقط برای مقایسهٔ مقادیر بـه دست آمـده، درج شده‌اند. ضمناً، در ستون آخر به دلیل عدم وجود $\Delta^۳f_۲$ و $\Delta^۳f_۳$ بقیهٔ فقره‌ها حساب نشده‌اند. نتایج این جدول، با توجه به این‌که $f(x) = f'(x)$ نشان می‌دهند که $\frac{\Delta f_i}{h}$ بسیار نزدیک به $f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)$ هستند. به عبارت دیگر، $\frac{\Delta f_i}{h}$ که هم‌تقریبی‌از $f'(x_i)$ و هم‌تقریبی از $f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)$ است به $f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)$ نزدیکتر است تا به $f'(x_i)$.

۵ـ۱ـ۳ خطای مشتقگیری عددی

برای پیدا کردن خطای فرمولهای مختلفی که از (۴.۵) برای $f'(x)$ حاصل می‌شود از بسط تیلر استفاده می‌کنیم. مثلاً،

$$f_{i+۱} = f(x_{i+۱}) = f(x_i+h)$$

در نتیجه،

$$f_{i+۱} = f_i + hf'_i + \frac{h^۲}{۲}f''_i + \frac{h^۳}{۶}f_i''' + \dots \qquad (۹.۵)$$

با توجه به (۵.۵) و با در نظر گرفتن (۹.۵)، داریم

$$\frac{f_{i+۱} + f'_i}{h} = f_i + \frac{h}{۲}f''_i + \dots \qquad (۱۰.۵)$$

از این رو، $\frac{f_{i+۱}-f_i}{h}$، به عنوان تقریبی از f'_i، عبارت است از

$$\frac{f_{i+۱} - f_i}{h} - f'_i = \frac{h}{۲}f_i'' + \frac{h^۲}{۶}f_i''' + \dots$$

با توجه به این که h کوچک گرفته می‌شود **جملهٔ غالب** در سمت راست $\frac{h}{۲}f''_i$ است که اصطلاحاً گفته می‌شود خطا متناسب با h است و یا نوشته می‌شود:

$$\frac{f_{i+۱} - f_i}{h} - f'_i = O(h) \qquad (۱۱.۵)$$

۵-۱-۴ تعریف (اوی بزرگ) O

اگر $f(h)$, $g(h)$ دو تابع از h باشند، همواره $g(h)\neq ۰$ و داشته باشیم

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(h)}{g(h)} = C\neq ۰$$

در این صورت می‌گوییم $f(h)=O(g(h))$.

در حالت خاصی که $g(h)=h^p$، که در آن p عدد حقیقی مثبتی است، داریم

$$f(h)=O(h^p)$$

هرچه p بزرگتر باشد $f(h)$ سریعتر به صفر میل می‌کند.

۵-۱-۵ تعریف (اوی کوچک) o

اگر $f,g(h)$ دو تابع از h باشند، همواره $g(h)\neq ۰$ و داشته باشیم

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(h)}{g(h)} = ۰$$

در این صورت می‌گوییم $f(h) = o(g(h))$ و اگر $g(h)= h^p$ آن‌گاه

$$f(h) = o(h^p)$$

به عبارت دیگر، $f(h)$ سریعتر از h^p به صفر میل می‌کند.

۵-۱-۶ قضیه

$$f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right) - \frac{f_{i+۱} - f_i}{h} = O(h^۲) \qquad (۱۲.۵)$$

برهان

با توجه به بسط تیلر تابع $f'(x)$ می‌توان نوشت:

$$f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right) = f'_i + \frac{h}{۲}f''_i + \frac{\left(\frac{h}{۲}\right)^۲}{۲!}f'''_i + \ldots$$

پس،

$$f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right) = f'_i + \frac{h}{۲}f''_i + \frac{h^۲}{۸}f'''_i + \ldots \qquad (۱۳.۵)$$

از تفریق جملات (۱۳.۵) و (۱۰.۵) نتیجه می‌شود

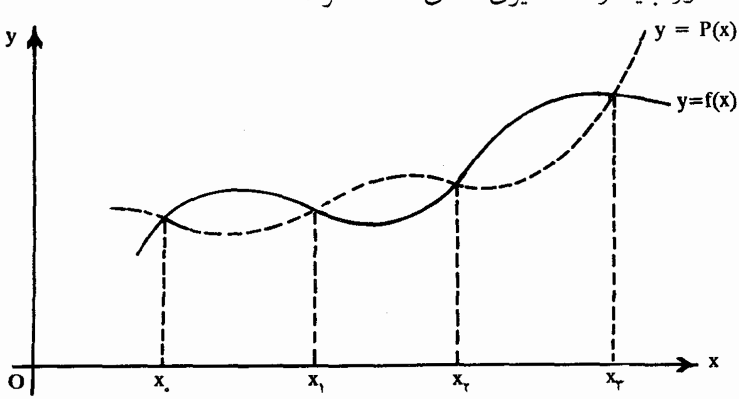
$$f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right) - \frac{f_{i+۱}-f_i}{h} = \frac{h^۲}{۸}f'''_i - \frac{h^۲}{۶}f'''_i + \ldots = -\frac{۱}{۲۴}h^۲f'''_i + \ldots$$

که فوراً حکم قضیه را به دست می‌دهد.

مثالهای (۵-۱-۱) و (۵-۱-۲) نتایج (۱۱.۵) و (۱۲.۵) را تأیید می‌کنند. به این معنا که هرچه توان h در عبارت خطا بیشتر باشد تقریب بهتر، یا خطا کمتر است. اما، به طور کلی نباید به نتایج تقریبی که از فرمولهای فوق حاصل می‌شود اعتماد کرد. در حالت کلی خطای فرمولهایی که از (۴.۵) حاصل می‌شوند به صورت $O(h^p)$ است که در آن p بستگی به تعداد جملاتی دارد که از (۴.۵) انتخاب می‌شود. ظاهراً هرچه p بزرگتر باشد خطا نیز کمتر خواهد بود، ولی عملاً خطای گرد کردن، به هنگام کوچک بودن مقدار h، سبب مشکلاتی در سازگاری نظری با نتایج عددی می‌شود. توضیح این که در محاسبهٔ کسر زیر به عنوان تقریبی از f'_i

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h},$$

که خطای آن متناسب با h است، ظاهراً برای کوچک بودن خطا باید h را حتی‌المقدور کوچک اختیار کنیم. اما اگر h خیلی کوچک باشد f_i و f_{i+1} دو عدد بسیار نزدیک خواهند بود و در محاسبهٔ $f_{i+1} - f_i$ ارقام با معنا کم و دقت کم می‌شود و چون این حاصل بر h، که قرار است بسیار کوچک باشد، تقسیم می‌شود (یعنی در حقیقت $(f_{i+1} - f_i)$ در $\frac{1}{h}$، که بسیار بزرگ است، ضرب می‌شود) خطا باز هم بیشتر می‌شود. خلاصه این که اگر h خیلی کوچک باشد خطای مقدار محاسبه شدهٔ $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ زیاد خواهد بود. از این‌رو، برای این که این کسر با خطایی نه چندان بزرگ محاسبه شود h نباید خیلی کوچک اختیار شود! پس از طرفی h باید خیلی کوچک اختیار شود، از طرف دیگر، نباید خیلی کوچک اختیار شود که در نتیجه در *تنگنا* قرارمی‌گیریم و باید بهترین h را اختیار کنیم که در عمل میسر نیست. شکل (۵-۱) نشان می‌دهد که اصولاً این مطلب که اگر $P(x)$ تقریبی از $f(x)$ باشد $P'(x)$ نیز تقریبی از $f'(x)$ است نتیجه‌گیری غلطی است و در عمل حتی‌المقدور نباید از مشتقگیری عددی استفاده کرد.



شکل ۵-۱

مماس بر منحنیهای $y=f(x)$ و $y=P(x)$، در نقاط برخورد آنها، را رسم کنید و مشاهده کنید که حتی در نقاطی که $P(x_i) = f(x_i)$ این مماسها چقدر با یکدیگر متفاوت‌اند. به عبارت دیگر، ضریب زاویهٔ خطوط مماس، در نقاطی که طول آنها $x_۰$، $x_۱$، ... است، بر دو منحنی کاملاً با هم متفاوت است!

۵-۱-۷ مشتقات مراتب بالا

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان مشتق مرتبهٔ دوم، سوم و... را نیز برآورد کرد. با توجه به مطالبی که در مورد خطای مشتقگیری عددی گفته شد تنها $f''(x)$ را بررسی می‌کنیم.

می‌دانیم که

$$f''(x) = \frac{d\,f'(x)}{d\,x} \simeq \frac{d\,p'(x)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$$

با استفاده از (۳.۵) و (۴.۵) داریم:

$$f''(x) \simeq \frac{۱}{h^۲}\left[\Delta^۲ f_i + (\theta-۱)\,\Delta^۳ f_i + \left[\frac{\theta^۲}{۲} - \theta + \frac{۵}{۱۲}\right]\Delta^۴ f_i + \dots\right] \qquad (۱۴.۵)$$

در اینجا هم می‌توان یک یا چند جمله از عبارت سمت راست را به عنوان تقریبی از $f''(x)$ اختیار کرد. مثلاً، اگر $\theta=۰$ آن گاه $x=x_i$ و

$$f''_i = f''(x_i) \simeq \frac{۱}{h^۲}\left(\Delta^۲ f_i - \Delta^۳ f_i + \frac{۵}{۱۲}\Delta^۴ f_i + \dots\right)$$

که از آن تقریبهای زیر حاصل می‌شود:

$$f''_i \simeq \frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} \qquad (۱۵.۵)$$

و یا

$$f'_i \simeq \frac{\Delta^۲ f_i - \Delta^۳ f_i}{h^۲} \qquad (۱۶.۵)$$

همچنین، اگر $\theta=۱$ داریم $x=x_i+h$ یعنی، $x=x_{i+۱}$ و در نتیجه

که از آن تقریبهای زیر حاصل می‌شود

$$f''_{i+۱} \simeq \frac{۱}{h^۲}\left(\Delta^۲ f_i - \frac{۱}{۱۲}\Delta^۴ f_i + \dots\right) \qquad (۱۷.۵)$$

$$f''_{i+۱} \simeq \frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} \qquad (۱۸.۵)$$

$$f''_{i+۱} \simeq \frac{\Delta^۲ f_i - \frac{۱}{۱۲}\Delta^۴ f_i}{h^۲}$$

۵ـ۱ـ۸ مثال

با استفاده از جدول تفاضلات مثال (۵ـ۱ـ۱) و فرمولهای (۱۵.۵) و (۱۶.۵) تقریبهایی از f''_i حساب کنید.

حل: با توجه به فرمولهای مذکور داریم:

x_i	f_i	f''_i از (۱۵.۵)	f''_i از (۱۶.۵)
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷	۱/۱۶۴	۱/۱۰۴
۰/۱۵	۱/۱۶۱۸۳	۱/۲۲۴	۱/۱۶۸
۰/۲	۱/۲۲۱۴۰	۱/۲۸	–

همان‌طور که قبلاً ذکر شد f_i مساوی e^{x_i} است. بنابراین، باید اعداد به دست آمده تقریباً با f_iها مساوی باشند. ملاحظه می‌شود که $\frac{\Delta^۲ f_i - \Delta^۳ f_i}{h^۲}$ تقریب بهتری برای f''_i است تا $\frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲}$. ضمناً، فرمول (۱۷.۵) و نتایج مندرج در ستون سوم جدول بالا نشان می‌دهند که $\frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲}$ تقریب بهتری برای $f''_{i+۱}$ است تا f''_i.

۵ـ۱ـ۸ خودآزمایی

۱ـ جدول زیر مقادیر تابع $f(x) = \sin x$ را در فواصل °۵ نشان می‌دهد (اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند).

x_i	۰	°۵	°۱۰	°۱۵	°۲۰	°۲۵	°۳۰
f_i	۰	۰/۰۸۷۲	۰/۱۷۳۶	۰/۲۵۸۸	۰/۳۴۲۰	۰/۴۲۲۶	۰/۵

مطلوب است محاسبهٔ برآوردی از:

الف ـ مقادیر

$$f'_i \qquad ، i = ۰, ۱, \ldots, ۵$$

با استفاده از فرمول $f'_i \simeq \frac{\Delta f_i}{h}$ و مقایسه این مقادیر با $\cos x_i$ و $\cos(x_i+۲/۵°)$.

ب ـ مقادیر f''_i، برای $i = ۰, ۱, \ldots, ۴$ با استفاده از فرمول $f''_i \simeq \frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲}$ و مقایسهٔ نتایج با $-\sin x_i$ و $-\sin x_{i+۱}$. (توجه داشته باشید که در هر مسئله‌ای که هم x و هم خطوط مثلثاتی آن در محاسبات وارد می‌شوند x باید برحسب رادیان منظور شود. مثلاً، در مسئله بالا، باید توجه کنید که $h = \frac{۵\times\pi}{۱۸۰} \simeq ۰/۰۸۷۳$)

۲ـ تمرین ۱ را در مورد تابع جدولی زیر نیز حل کنید.

x_i	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۳۵
f_i	۱/۱۰۱۲۷	۱/۲۰۵۱۷	۱/۳۱۱۸۳	۱/۴۲۱۴۰	۱/۵۳۴۰۳	۱/۶۴۹۸۶	۱/۷۶۹۰۷

۳ـ مطلوب است تعیین خطای فرمولهای تقریبی زیر

$$f''_i \simeq \frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} \qquad \text{(آ)}$$

$$f''_{i+۱} \simeq \frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} \qquad \text{(ب)}$$

$$f'''_i \simeq \frac{\Delta^۲ f_i - \Delta^۳ f_i}{h^۲} \qquad \text{(پ)}$$

۴ـ جدول زیر به مقادیر $f(x) = \sqrt{x}$ مربوط است.

x_i	۱	۱/۰۵	۱/۱	۱/۱۵	۱/۲	۱/۲۵
f_i	۱	۱/۰۲۴۷۰	۱/۰۴۸۸۱	۱/۰۷۲۳۸	۱/۰۹۵۴۵	۱/۱۱۸۰۳

از فرمول (۴.۵) قراردهید

$$f'(x) \simeq \frac{\Delta f_i + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \Delta^2 f_i}{h}$$

و مقادیر زیر را تخمین بزنید:

$f''(1/21)$ و $f''(1/175)$ و $f''(1/08)$ و $f''(1/02)$

(*راهنمایی*: با توجه به مقادیر x ابتدا مقادیر θ را به دست آورید).

۲ـ۵ انتگرالگیری عددی

محاسبهٔ انتگرالهای معین به شکل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

که در آن a و b متناهی و f(x) بر [a,b] معین باشد، به روشهای تحلیلی، یعنی با استفاده از تابع اولیه f(x)، غالباً یا مشکل است یا غیر ممکن. بنابراین، حتی در صورت موجود بودن تابع اولیه برای f(x) نیز از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود. واضح است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت سطح زیر منحنی y=f(x) که محصور به محور x و خطوط x=a و x=b است، تعبیر کرد و با تقسیم بازهٔ [a,b] به زیر بازه‌ها و جمع‌کردن مساحتهای مربوط به این زیربازه‌ها آن را محاسبه کرد. با استفاده از این خاصیت و چند جمله‌ای درونیاب می‌توان تقریبهای مناسبی برای $\int_a^b f(x)\,dx$ به دست آورد.

ابتدا روشی را به کار می‌بریم که در آن [a,b] به n قسمت متساوی تقسیم می‌شود، یعنی [a,b] به زیر بازه‌های

$$[x_i , x_{i+1}]=h \quad , \quad i= 0,1,\dots ,n-1$$

تقسیم می‌شود که در آن

$$x_{i+1} - x_i=h \ , \ i= 0,1,\dots, n-1$$

و در نتیجه

$$h= \frac{b-a}{n} \ , \qquad (19.5)$$

و بعد چندجمله‌ای درونیاب $P_m(x)$ در نقاط x_i، x_{i+1}، ...، x_{i+m}، با استفاده از (۳۶.۴)، حساب می‌شود و بعد

$$\int_{x_i}^{x_{i+m}} P_m(x)\,dx$$

به دست می‌آید. با جمع کردن این مقادیر، تقریبی برای

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_x^{x_n} f(x)\,dx$$

به دست می‌آید. در زیر، حالتهایی راکه $m=1$ و $m=2$ بررسی می‌کنیم.

۵ـ۲ـ۱ قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

در این قاعده چند جمله‌ای درونیاب تابع f را در نقاط x_i و x_{i+1} به دست می‌آوریم، که یک خط است. معادلهٔ این خط عبارت است از (با توجه به ۳۷.۴)

$$p_1(x) = f_i+\theta\,\Delta f_i \qquad (۲۰.۵)$$

در نتیجه، با تغییر متغیر $x=x_i+\theta h$،

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx = \int_0^1 (f_i+\theta\Delta f_i)h\,d\theta$$
$$= h\left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i\right]_0^1$$
$$= h\left(f_i + \frac{1}{2}\Delta f_i\right)$$

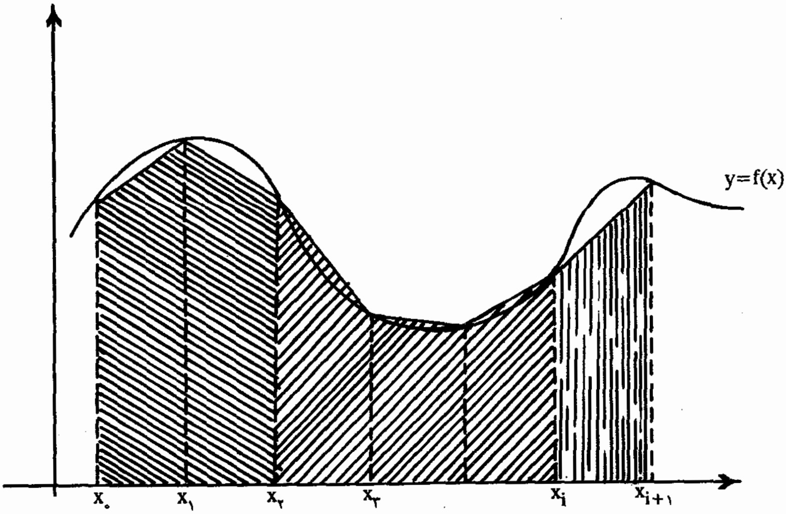
اگر به جای Δf_i قراردهیم $f_{i+1}-f_i$ به دست می‌آوریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})$$

بنابراین، قرارمی‌دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}) \qquad (۲۱.۵)$$

با توجه به شکل (۵ـ۲)، در واقع مقدار تقریبی مساحت ذوزنقه‌ای است که با خطوط قائم هاشور زده شده است. از این رو، (۲۱.۵) را **فرمول قاعدهٔ ذوزنقه‌ای** می‌نامند.



شکل ۵ـ۲

برای پیدا کردن فرمول تقریبی برای $\int_a^b f(x)$ می‌نویسیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$+\ldots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_0+f_1)+\frac{h}{2}(f_1+f_2)+\ldots$$

$$+\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})+\ldots+\frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)=\frac{h}{2}(f_0+2f_1+\ldots+2f_{n-1}+f_n)$$

عبارت اخیر را، با توجه به حرف اول کلمهٔ لاتین معادل ذوزنقه‌ای، $T(h)$ می‌نامیم. بنابراین،

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h)=\frac{h}{2}\left(f_0+2f_1+\ldots+2f_{n-1}+f_n\right) \tag{۲۲.۵}$$

شکل (۵ـ۲) نشان می‌دهد که هرچه h کوچکتر اختیار شود خطا کمتر است، البته به بهای محاسبه مقدار تابع در نقاط بیشتری فرمول (۲۲.۵) را فرمول **قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مرکب** می‌نامند.

۵ـ۲ـ۲ مثال

تقریبهایی از $\int_0^1 x^2 dx$ را، به روش ذوزنقه‌ای، و به ازای $h=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ حساب و خطای این

مقادیر را نیز تعیین کنید.

حل: بنابر (۲۲.۵) داریم، با توجه به اینکه $a=0$، $b=1$ ، $f(x)=x^2$،

$$T(1)=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{2}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)=\frac{1}{4}\left(0+2\times\frac{1}{4}+1\right)=\frac{3}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{2}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(0+2\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{9}{16}+1\right)=\frac{11}{32}.$$

مقدار واقعی چنین حساب می‌شود!

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

ملاحظه می‌شود که هرچه h کوچکتر می‌شود $T(h)$ نیز به $\frac{1}{3}$ نزدیکتر می‌شود.
خطای مطلق مقادیر حساب شده عبارت است از

$$T(1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$T(\tfrac{1}{2})-\frac{1}{3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$$

$$T(\tfrac{1}{4})-\frac{1}{3}=\frac{11}{32}-\frac{1}{3}=\frac{1}{96}$$

ملاحظه می‌شود که وقتی h نصف می‌شود، یعنی به جای ۱ می‌شود $\frac{1}{2}$، خطا $\frac{1}{4}$ می‌شود (یعنی $\frac{1}{6}$ می‌شود $\frac{1}{24}$، که $\frac{1}{4}$ عدد $\frac{1}{6}$ است). بنابراین، چنین حدس زده می‌شود که خطا متناسب با h^2 است. درستی این حدس را بعداً ثابت می‌کنیم.

۵-۲-۳ مثال

۱- تقریبی از $\int_{\circ}^{۱} f(x)\, dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر حساب کنید.

x_i	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f_i	۱	۱/۲۲۱۴	۱/۴۹۱۸	۱/۸۲۲۱	۲/۲۲۵۵	۲/۷۱۸۳

حل: مشاهده می‌شود که در این مثال خبری از ضابطهٔ تابع f نیست. با توجه به نقاط جدولی می‌توانیم قاعدهٔ ذوزنقه‌ای را با فرض $h=۰/۲$ به کار بریم.

$$T(۰/۲) = \frac{۰/۲}{۲}\left(f(۰) + ۲\,(f(۰/۲) + f(۰/۴) + f(۰/۶) + f(۰/۸)) + f(۱)\right)$$

که با توجه به جدول مقادیر، چنین نوشته می‌شود:

$$T(۰/۲)= ۰/۱\ (۱+۲\times ۶/۷۶۰۸ + ۲/۷۱۸۳) = ۱/۷۲۳۹۹$$

اعداد جدول بالا مربوط به مقادیر تابع $f(x) = e^x$ هستند، برای این تابع داریم

$$\int_{\circ}^{۱} e^x\, dx = e^x\Big|_{\circ}^{۱} = e-۱= ۱/۷۱۸۲۸ \quad (۵D)$$

ملاحظه می‌شود که خطا برابر است با

$$۱/۷۲۳۹۹ - ۱/۷۱۸۲۸ = ۰/۰۰۵۷۱$$

۲- تقریبی از $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx$ را با استفاده از $h=\frac{\pi}{۸}$ حساب کنید و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

حل:

$$T\left(\frac{\pi}{۸}\right) = \frac{\pi}{۱۶}\left(\sin ۰ + ۲\sin\frac{\pi}{۸} + ۲\sin\frac{\pi}{۴} + ۲\sin\frac{۳\pi}{۸} + \sin\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$= \frac{\pi}{۱۶}\left(۰ + ۲(۰/۳۸۲۶۸ + ۰/۷۰۷۱۱ + ۰/۹۲۳۸۸) + ۱\right)$$

$$= \frac{\pi}{۱۶}\times ۵/۰۲۷۳۴.$$

بنابراین،

$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx \simeq T\left(\frac{\pi}{۸}\right) = ۰/۹۸۷۱۲.$$

$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx = -\cos x\ \Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} = ۱$$

مقدار واقعی انتگرال عبارت است از

$$\text{مقدار واقعی} - T(\frac{\pi}{۸}) = ۱ - ۰/۹۸۷۱۲ = ۰/۰۱۲۸۸$$

۵-۲-۴ برنامهٔ قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مرکب

می‌دانیم که برای تقریب $\int_a^b f(x)\,dx$ به قاعدهٔ مرکب ذوزنقه‌ای داریم:

$$T(h) = \frac{h}{۲}\left[f(x_۰) + ۲f(x_۱) + \ldots + ۲f(x_{n-۱}) + f(x_n)\right]$$

$$= h\left[\frac{۱}{۲}(f(x_۰) + f(x_n)\right] + h\left[f(x_۱) + \ldots + f(x_{n-۱})\right]$$

ضمناً داریم:

$$x_۰ = a \quad , \quad x_n = b \quad , \quad h = \frac{b-a}{n}$$

برنامهٔ زیر با توجه به مطالب بالا برای $f(x) = e^x \sin x$ نوشته شده است

```
10 DEF FNF(X) = EXP(X) * SIN (X)
20 INPUT A,B,N
30 LET S= (FNF(A) + FNF(B))/2
40 LET H= (B-A)/N :LET X=A
50 FOR I=۱ TO N-۱
60 LET X=X+H
70 LET S=S+ FNF(X)
80 NEXT I
90 LET TH=H*S
100 PRINT "T(h) =" ; TH
```

با تغییر عبارت مربوط به تابع در خط ۱۰ می‌توان تقریبی از انتگرال توابع مختلف را حساب کرد.

۵ـ۲ـ۵ خودآزمایی

۱ـ مطلوب است تعیین تقریبهایی از انتگرالهای زیر به ازای hهای داده شده، و مقایسهٔ جواب واقعی با آنها.

(آ) $$\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^{2}} \;, \qquad h=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$$

(ب) $$\int_{1}^{2} x\, e^{x}\, dx\,, \qquad h=\frac{1}{2},\frac{1}{4}$$

۲ـ مقادیر تابع $f(x)=e^x$ را در یک جدول، به ازای ۰/۴ و ۰/۳ و ۰/۲ و ۰/۱ و ۰ = x، تا پنج رقم

با معنا، بنویسید و بعد تقریبی از $\int_{0}^{0/4} f(x)\,dx$ ، به کمک جدول نوشته شده، حساب و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

برای محاسبهٔ خطای $T(h)$ به قضایای زیر نیاز داریم. این قضایا در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال ثابت می‌شوند.

۵ـ۲ـ۶ قضیه

اگر تابع h بر $[c,d]$ پیوسته و تابع g در این بازه انتگرالپذیر باشد و تغییر علامت ندهد (یعنی، همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد) در این صورت،

$$\int_{c}^{d} g(x)\,h(x)\,dx = h(\eta)\int_{c}^{d} g(x)\,dx$$

که $\eta\in[c,d]$.

۵ـ۲ـ۷ قضیه

اگر تابع h بر $[c,d]$ پیوسته باشد و

$$\min_{c\le x\le d} h(x)\le\zeta\le\max_{c\le x\le d} h(x)$$

آن گاه ζ ی هست که

$$c\le\eta\le d \quad , \quad h(\eta)=\zeta$$

به عبارت دیگر، هرتابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته و محدود، هر مقدار بین ماکسیمم و مینیمم خود را در نقطه‌ای از حوزهٔ تعریفش اختیار می‌کند.

۸-۲-۵ قضیه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای از فرمول زیر به دست می‌آید

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \qquad (۲۳۵)$$

که در آن η_i بین x_i و x_{i+1} است، به شرط آن که $f''(x)$ پیوسته باشد.

برهان

چون فرمول قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به وسیلهٔ چند جمله‌ای درونیاب f که در نقاط x_i و x_{i+1} با آن هم مقدار است، به دست آمد خطای این چندجمله‌ای را، با استفاده از قضیه (۴-۴-۲)، می‌نویسیم

$$f(x) - P_1(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2!} f''(\eta_x) \quad , \quad (\eta_x \in [x_i, x_{i+1}])$$

که در آن $P_1(x)=f_i+\theta\Delta f_i$، اگر از طرفین رابطهٔ بالا انتگرال بگیریم نتیجه می‌شود

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2!} f''(\eta_x)\,dx$$

با توجه به این که بر $[x_i,x_{i+1}]$ داریم

$$x - x_i \geq 0$$

و

$$x - x_{i+1} \leq 0$$

نتیجه می‌گیریم که همواره

$$g(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \leq 0$$

یعنی، $g(x)$ بر $[x_i , x_{i+1}]$ تغییر علامت نمی‌دهد و چون $h(x) = f''(\eta_x)$ نیز پیوسته فرض شده است، بنابر قضیهٔ (۵-۲-۶)، می‌توان نوشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} - f_i) = \frac{f''(\eta_i)}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})\,dx \quad (۲۴.۵)$$

که در آن η_i عددی بین x_i و x_{i+1} است. انتگرال سمت راست این تساوی، با تغییر متغیر $x=x_i+\theta h$، چنین حساب می‌شود:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})\,dx = \int_0^1 h\theta \times h(\theta-1) \times h\, d\theta$$

$$= h^3\int_0^1 (\theta^2 - \theta)\,d\theta = h^3\left[\frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{h^3}{6}$$

لذا، با توجه به (۲۴.۵) داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} - f_i) = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_i)$$

برای تعیین خطای $T(h)$ از جمعی بودن انتگرال و قضیهٔ (۵-۲-۸) استفاده می‌کنیم.

۵-۲-۹ قضیه

با توجه به علامات به کار برده شده در این فصل و پیوسته بودن $f''(x)$ بر $[a,b]$

$$ET(h) = \int_a^b f(x)\,dx - T(h) = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta), \quad (۲۵.۵)$$

که $a \le \eta \le b$.

برهان

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای بر کل بازهٔ $[a,b]$ برابر است با مجموع خطاهای این قاعده بر تک‌تک زیر بازه‌های $[x_i,x_{i+1}]$. در نتیجه،

$$\int_a^b f(x)\,dx - T(h) = \left[\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_0+f_1)\right]$$
$$+\left[\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_1+f_2)\right] +\dots+\left[\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)\right]$$

که بنابر (۲۳.۵)، به ازای $i=0,1,\dots,n-1$ برابر است با

$$-\frac{h^3}{12}f''(\eta_0)-\frac{h^3}{12}f''(\eta_1)-\dots-\frac{h^3}{12}f''(\eta_{n-1})$$

بنابراین،

$$ET(h) = -\frac{h^3}{12}\left(f''(\eta_0)+f''(\eta_1)+\dots+f''(\eta_{n-1})\right) \tag{۲۶.۵}$$

فرض کنید

$$m=\min_{a\le x\le b} f''(x) \qquad , \qquad M=\max_{a\le x\le b} f''(x)$$

در این صورت،

$$m\le f''(\eta_i)\le M \qquad , \qquad i=0,1,\dots,n-1$$

از جمع نامساویهای اخیر نتیجه می‌شود که

$$n\times m\le f''(\eta_0)+\dots+f''(\eta_{n-1})\le n\times M$$

در نتیجه،

$$m\le \frac{f''(\eta_0)+\dots+f''(\eta_{n-1})}{n} \le M$$

از این رو، بنابر قضیهٔ ۵-۲-۷ (کسر اخیر را ξ فرض کنید که بین مینیمم و ماکسیمم تابع پیوسته $f''(x)$ قراردارد.) η ی هست که $a\le\eta\le b$ و

$$f''(\eta)=\frac{f''(\eta_{۰})+...+f''(\eta_{n-۱})}{n} \qquad (۲۷.۵)$$

از (۲۷.۵) نتیجه می‌گیریم

$$f''(\eta_{۰})+f''(\eta_{۱})+...+f''(\eta_{n-۱})=n\,f''(\eta)$$

اکنون رابطهٔ (۲۶.۵)، با استفاده از (۲۸.۵)، چنین نوشته می‌شود:

$$ET(h)=-\frac{n\,h^{۳}}{۱۲}f''(\eta) \qquad (۲۹.۵)$$

اما، بنابر (۱۹.۵) داریم

$$nh = (b-a)$$

که با استفاده از آن (۲۹.۵) به صورت زیر درمی‌آید که حکم قضیه است.

$$ET(h)=-\frac{(b-a)\,h^{۲}}{۱۲}f''(\eta)$$

نتیجهٔ زیر مستقیماً از قضیه (۵ـ۲ـ۹) حاصل می‌شود.

۵ـ۲ـ۱۰ نتیجه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مرکب متناسب با $h^{۲}$ است و این قاعده برای توابع چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ اول دقیق است.

برهان

اولاً بنابر (۲۵.۵) چون $f''(\eta)$ و $\frac{(b-a)}{۱۲}$ اعداد ثابتی هستند $ET(h)$ متناسب با $h^{۲}$ است. ثانیاً $f''(x)$ وقتی همواره صفر است که تابع f یک چندجمله‌ای حداکثر درجه اول باشد، که در این صورت، $ET(h)=۰$ یعنی، مقدار $T(h)$ دقیقاً مساوی $\int_a^b f(x)\,dx$ است که اصطلاحاً گفته می‌شود قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، در این حالت، دقیق است.

۵-۲-۱۱ نتیجه

اگر $M_۲$ یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد، یعنی

$$\max_{a\leq x\leq b} |f''(x)| \leq M_۲ \tag{۵.۳۰}$$

آنگاه

$$|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{۱۲} h^۲ M_۲ \tag{۵.۳۱}$$

برهان

با توجه به (۵.۲۵) و (۵.۳۰) داریم

$$|ET(h)| = \frac{(b-a)}{۱۲} h^۲ |f''(\eta)| \leq \frac{(b-a)}{۱۲} h^۲ M_۲$$

نامساوی (۵.۳۱) برای برآورد h ، به طوری‌که خطای T(h) از مقدار معینی بیشتر نباشد، به کار می‌رود. اگر بخواهیم $|ET(h)| < \varepsilon$ کافی است h را چنان پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$\frac{(b-a)}{۱۲} h^۲ M_۲ \leq \varepsilon$$

۵-۲-۱۲ مثال

تقریبی از $\int_۰^۱ x \sin x\, dx$، به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، حساب کنید که خطای آن از $۱۰^{-۲}$ کمتر باشد.

حل: ابتدا $M_۲$ را به دست می‌آوریم. برای این منظور مشتق مرتبهٔ دوم

$$f(x) = x \sin x$$

را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \quad , \quad f''(x) = ۲\cos x - x \sin x$$

بنابراین، با توجه به این‌که $۰ \leq x \leq ۱$،

$$|f''(x)| = |۲\cos x - x\sin x| \leq ۲|\cos x| + |x|\,|\sin x| \leq ۲+۱=۳$$

پس، $M_۲=۳$ و h را از نامساوی زیر به دست می‌آوریم.

که از آن نتیجه می‌شود
$$\frac{b-a}{۱۲}h^{۲}M_{۲}=\frac{h^{۲}}{۱۲}\times ۳=\frac{h^{۲}}{۴}\leq ۱۰^{-۲}$$
$$h\leq ۰/۲$$
از این رو، قرارمی‌دهیم $h=۰/۲$ و $T(h)$ را حساب می‌کنیم (اعداد میانی را تا چهار رقم اعشار گرد می‌کنیم).

$$T(۰/۲)=\frac{۰/۲}{۲}(۰+۲(۰/۲\sin ۰/۲+۰/۴\sin ۰/۴+۰/۶\sin ۰/۶+۰/۸\sin ۰/۸)+\sin ۱)$$

$$=۰/۱(۰+۲(۰/۰۳۹۷۳+۰/۱۵۵۷۷+۰/۳۳۸۷۹+۰/۵۷۳۸۸)+۰/۸۴۱۴۷)$$

$$=۰/۳۰۵۷۸$$

با محاسبهٔ جواب واقعی به طریق زیرخطای $T(h)$ نیز حساب می‌شود.

$$\int_{۰}^{۱} x\sin x\,dx=(\sin x-x\cos x)\Big|_{۰}^{۱}=\sin ۱-\cos ۱=۰/۸۴۱۴۷-۰/۵۴۰۳۰$$
$$=۰/۳۰۱۱۷(۵D)$$

بنابراین،

$$|ET(h)|=|۰/۳۰۱۱۷-۰/۳۰۵۷۸|=۰/۰۰۴۶۱$$

ملاحظه می‌شود که $|ET(h)|<۱۰^{-۲}$ ر

۵-۲-۱۳ خودآزمایی

۱ـ تقریبی از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از ۰/۰۰۰۱ و به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، حساب کنید.

(آ) $\int_{۰}^{۱} e^{x}\,dx$

(ب) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos x\,dx$

(پ) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x\cos x\,dx$

۲ـ برای تعیین تقریبی از $\int_{x_\circ}^{x_n} f(x)\,dx$ قرار می‌دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq h f_i$$

اولاً فرمول این روش را برای $\int_{x_\circ}^{x_n} f(x)\,dx$ به‌دست آورید، ثانیاً خطای آن را محاسبه و با خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مقایسه کنید. این روش برای چه توابعی دقیق است؟

۳ـ تمرین ۲ را برای وقتی که قراردهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq h f_{i+1}$$

نیز حل کنید.

۴ـ تقریبی از $\int_{\circ}^{\circ/1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را، به یکی از روشهای انتگرالگیری عددی که تاکنون می‌دانید، با استفاده از $h = \circ/\circ ۲$ حساب کنید. (*راهنمایی*: چون $f(\circ)$ بی‌معنی است باید از روشی استفاده کنید که در فرمول آن مقدار تابع در صفر منظور نشده است.)

۵ـ۳ قاعدهٔ سیمسون

همان‌گونه که از (۵ـ۲ـ۱۱) و (۵ـ۲ـ۱۲) مشهود است قاعدهٔ ذوزنقه‌ای بسیار کند است. به عبارت دیگر، برای به دست آوردن تقریبی نه چندان دقیق باید تابع را در نقاط بسیاری محاسبه کرد. روش سیمسون برای محاسبات دستی بسیار ساده و نسبتاً دقیق است. این روش بر اساس جایگزین کردن یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم، به جای تابع f، در $[x_i, x_{i+2}]$، به دست می‌آید.

۵ـ۳ـ۱ فرمول قاعدهٔ سیمسون

ابتدا چند جمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_i، x_{i+1}، x_{i+2} می‌نویسیم. این چندجمله‌ای بنا (۴.۳۸) عبارت است از

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_i$$

بنابراین، قرارمی‌دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)\,dx$$

و انتگرال سمت راست را حساب می‌کنیم.
با تغییر متغیر $x=x_i+\theta h$ داریم

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)\,dx = \int_{0}^{2} (f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i)\,h\,d\theta$$
$$= h\left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4}\right)\Delta^2 f_i\right]_0^2$$

بنابراین،

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = h\left(2f_i + 2\Delta f_i + \frac{1}{3}\Delta^2 f_i\right),$$

که با توجه به روابط

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad , \quad \Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

چنین ساده می‌شود

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right).$$

بنابراین **فرمول قاعدهٔ سیمسون** عبارت است از

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right]. \tag{۳۲.۵}$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمسون در سراسر بازهٔ $[x_0,x_n]$ ، چون (۳۲.۵) تقریبی برای بازهٔ $[x_i,x_{i+2}]$ است لذا باید n زوج باشد تا بتوان (۳۲.۵) را به کار برد. با فرض زوج بودن n داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

با به کار بردن (۳۲.۵) به ازای $i=0,2,\ldots,n-2$ به دست می‌آوریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)+\frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4)+\ldots+\frac{h}{3}(f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n).$$

عبارت اخیر را، با توجه به حرف اول کلمه سیمسون، $S(h)$ می‌نامیم. بنابراین،

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq S(h)=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\ldots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n). \qquad (۳۳.۵)$$

این فرمول قاعدهٔ سیمسون مرکب است.

۵-۳-۲ مثال

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$، به قاعدهٔ سیمسون، با $h=\frac{\pi}{4}$ و تقریب دیگری به ازای $h=\frac{\pi}{8}$ حساب کنید.

حل:

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\left(\sin 0+4\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{12}(0+2\sqrt{2}+1)=\frac{\pi(2\sqrt{2}+1)}{12}=1{,}00228$$

به ازای $h=\frac{\pi}{8}$ داریم (با توجه به (۳۳.۵))

$$S\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\frac{\pi}{8}}{3}\left(\sin 0+4\sin\frac{\pi}{8}+2\sin\frac{\pi}{4}+4\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{24}(0+1{,}53073+1{,}41421+3{,}69552+1)$$
$$=\frac{\pi\times 7{,}64046}{24}=1{,}00013$$

ملاحظه می‌شود که چون

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$S(\frac{\pi}{4})$ و بخصوص $S(\frac{\pi}{8})$، نسبتاً دقیق هستند. جالب این که در $S(\frac{\pi}{8})$، با توجه به این‌که $\sin 0$ و $\sin\frac{\pi}{2}$ را می‌دانیم، نیاز به محاسبهٔ سه مقدار تابع $\sin x$ داریم.

ضمناً، $S(\frac{\pi}{۴})$ خیلی دقیقتر از $T(\frac{\pi}{۸})$ است که در مثال (۵-۲-۴) به دست آوردیم

۵-۳-۳ مثال

تقریبی از $\int_{۰}^{۱} x^{۳} dx$ را به قاعدهٔ سیمسون حساب کنید.

حل: بزرگترین مقداری که برای h می‌توان اختیار کرد $h=\frac{۱}{۲}$ است (زیرا، تعداد زیر فاصله‌ها باید زوج باشد). بنابراین، داریم

$$S\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{\frac{۱}{۲}}{۳}\left[f(۰) + ۴f\left(\frac{۱}{۲}\right) + f(۱) \right]$$
$$= \frac{۱}{۶}\left(۰ + ۴ \times \frac{۱}{۸} + ۱ \right) = \frac{۱}{۴}$$

اما،

$$\int_{۰}^{۱} x^{۳} dx = \frac{x^{۴}}{۴} \Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۴}$$

یعنی،

$$S\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۴}$$

البته این اتفاقی نیست و در ادامه ثابت خواهیم کرد که قاعدهٔ سیمسون برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ سوم دقیق است.

۵-۳-۴ خطای S(h)

برای تعیین خطای S(h) ابتدا خطای (۳۲.۵) را حساب می‌کنیم. برای این منظور، و سادگی عملیات، تفاضل زیر را حساب می‌کنیم

$$E_i = \int_{x_{i-۱}}^{x_{i+۱}} f(x)\,dx - \frac{h}{۳}\left(f_{i-۱} + ۴f_i + f_{i+۱} \right)$$

بنابر بسط تیلر تابع f در مجاورت x_i می‌توان نوشت

$$f_{i+1}=f(x_i+h)=f_i+hf'_i+\frac{h^2}{2}f''_i+\frac{h^3}{3!}f'''_i+\frac{h^4}{4!}f_i^{(4)}+\dots$$

$$f_{i-1}=f(x_i-h)=f_i-hf'_i+\frac{h^2}{2}f_i^{n}-\frac{h^3}{3!}f'''_i+\frac{h^4}{4!}f_i^{(4)}+\dots$$

در نتیجه،

$$f_{i-1}+f_{i+1}=2f_i+h^2f''_i+\frac{h^4}{12}f_i^{(4)}+\dots$$

که از آن به دست می‌آید، با اضافه کردن $4f_i$ به طرفین و ضرب حاصل در $\frac{h}{3}$،

$$\frac{h}{3}(f_{i-1}+4f_i+f_{i+1})=2hf_i+\frac{h^3}{3}f''_i+\frac{h^5}{36}f_i^{(4)}+\dots \qquad (34.5)$$

اکنون $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}f(x)\,dx$ را نیز بر حسب f_i و مشتقات f در x_i حساب می‌کنیم. بنابر بسط تیلر داریم

$$f(x)=f_i+\frac{(x-x_i)}{1!}f'_i+\frac{(x-x_i)^2}{2!}f''_i+\frac{(x-x_i)^3}{3!}f'''_i+\frac{(x-x_i)^4}{4!}f_i^{(4)}+\dots \qquad (35.5)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}f(x)\,dx=\left[xf_i+\frac{(x-x_i)^2}{2}f'_i+\frac{(x-x_i)^3}{6}f''_i+\frac{(x-x_i)^4}{24}f'''_i+\frac{(x-x_i)^5}{120}f_i^{(4)}+\dots\right]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}$$

$$=x_{i+1}f_i+\frac{h^2}{2}f'_i+\frac{h^3}{6}f''_i+\frac{h^4}{24}f'''_i+\frac{h^5}{120}f_i^{(4)}+\dots$$

$$\left[x_{i-1}f_i+\frac{h^2}{2}f'_i-\frac{h^3}{6}f''_i+\frac{h^4}{24}f_i'''-\frac{h^5}{120}f_i^{(4)}+\dots\right]$$

با توجه به این که،

$$x_{i+1}-x_{i-1}=2h$$

به دست می‌آوریم

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = 2hf_i + \frac{h^3}{3}f''_i + \frac{h^5}{60}f_i^{(4)} + \dots$$

از (۳۴.۵) و تساوی بالا نتیجه می‌گیریم که

$$E_i = \left(\frac{h^5}{60} - \frac{h^5}{36}\right) f_i^{(4)} + \dots \simeq -\frac{h^5}{90} f_i^{(4)}. \qquad (۳۶.۵)$$

با استفاده از (۳۶.۵) و جمعی بودن انتگرال می‌توان خطای $S(h)$ را حساب کرد.

$$\begin{aligned} ES(h) &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx - S(h) = \left[\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)\right] \\ &+ \left[\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx - \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4)\right] + \dots \\ &+ \left[\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)\right] \\ &= E_1 + E_3 + E_5 + \dots + E_{n-1} \end{aligned}$$

که با توجه به (۳۶.۵) به دست می‌آوریم:

$$ES(h) \simeq -\frac{h^5}{90}\left(f_1^{(4)} + f_3^{(4)} + \dots + f_{n-1}^{(4)}\right). \qquad (۳۷.۵)$$

حال اگر قرار دهیم

$$M = \max_{x_0 \le x \le x_n} f^{(4)}(x) \qquad m = \min_{x_0 \le x \le x_n} f^{(4)}(x)$$

چون

$$m \le f^{(4)}_i \le M \quad , \quad i = 1, 3, \ldots, n-1$$

داریم:

$$\frac{n}{2} \times m \le \left(f_1^{(4)} + f_3^{(4)} + \ldots + f_{n-1}^{(4)} \right) \le \frac{n}{2} \times M$$

پس،

$$m \le \frac{f_1^{(4)} + \ldots + f_{n-1}^{(4)}}{\frac{n}{2}} \le M.$$

از این رو، بنابر قضیه ۵ـ۲ـ۷،

$$\frac{f_1^{(4)} + f_3^{(4)} + \ldots + f_{n-1}^{(4)}}{\frac{n}{2}} = f^{(4)}(\eta)$$

که در آن η بین x_0 و x_n است. با توجه به تساوی اخیر (۳۷.۵) چنین نوشته می‌شود

$$ES(h) \simeq -\frac{h^5}{90} \times \frac{n}{2} f^{(4)}(\eta)$$

که با در نظر گرفتن این که $n\,h = (b-a)$، به صورت زیر درمی‌آید

$$ES(h) \sim -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \tag{۳۸.۵}$$

بـه کـمک روشـهای پـیشرفته‌تر، مـی‌توان ثـابت کـرد کـه در (۳۸.۵) تـساوی بـرقرار است، (ر.ک. [۱۹]).

رابطهٔ (۳۸.۵) نشان می‌دهد که خطای $S(h)$ متناسب با h^4 است و این خطا برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ سوم صفر است (زیرا، مشتق چهارم یک چندجمله‌ای که درجه آن نابیشتر از ۳ باشد صفر است) به عبارت دیگر روش سیمسون برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ ۳ دقیق است. با توجه به این که η نقطهٔ مشخصی نیست در عمل فرض می‌کنند

$$\max_{x_0 \le x \le x_n} \left| f^{(4)}(x) \right| \le M_4 \qquad (۳۹.۵)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\left| ES(h) \right| \le \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 \qquad (۴۰.۵)$$

با استفاده از (۴۰.۵) می‌توان $S(h)$ را با دقتی که از قبل تعیین می‌شود حساب کرد. یعنی، اگر بخواهیم $S(h)$ را چنان پیدا کنیم که

$$\left| ES(h) \right| < \varepsilon$$

که در آن ε عدد کوچک معلومی است، کافی است h را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 \le \varepsilon$$

البته با داشتن تابع f مشکلی در محاسبهٔ M_4 نیست.

۵-۳-۵ مثال

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ را به روش سیمسون حساب کنید که خطای آن کمتر از 10^{-5} باشد.

حل: با توجه به این که $f(x) = x\cos x$ داریم

$$f'(x) = \cos x - x\sin x \quad , \quad f''(x) = -2\sin x - x\cos x$$

$$f'''(x) = -3\cos x + x\sin x \quad , \quad f^{(4)}(x) = 4\sin x + x\cos x$$

بنابراین، با توجه به این که $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$، M_4 را به دست می‌آوریم:

$$\left| f^{(4)}(x) \right| = | 4\sin x + x\cos x | \le 4 | \sin x | + | x | \, | \cos x | \le 4 + \frac{\pi}{2} < 6$$

پس، $M_4 = 6$ و قرار می‌دهیم

$$\frac{b-a}{180}h^4M_4=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{180}h^4\times 6=\frac{\pi h^4}{60}\leq 10^{-5}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$h\leq 0/1\times\sqrt{\frac{6}{\pi}}\simeq 0/1176$$

چون $nh = b-a = \frac{\pi}{2}$، پس

$$n = \frac{\pi}{2h}\geq 13/357$$

چون در روش سیمسون n باید زوج باشد قرار می‌دهیم ۱۴=n که در نتیجه h مربوط به آن، که حتماً از ۰/۱۱۷۶ کمتر است، چنین به دست می‌آید

$$h=\frac{\frac{\pi}{2}}{n}=\frac{\pi}{28}\simeq 0/1122$$

به این ترتیب باید S(h) را به ازای ۰/۱۱۲۲=h حساب کنیم. وقتی تعداد جملات زیاد باشد و نتوان محاسبات را دستی، یا حتی با ماشین حساب انجام داد، می‌توان از یک برنامهٔ کامپیوتری استفاده کرد. برنامهٔ زیر، که به زبان بیسیک نوشته شده است این کار را انجام می‌دهد.

در برنامهٔ زیر A و B حد پایین و بالای انتگرال هستند و N تعداد زیر فاصله‌هاست، که باید زوج باشد.

```
10 REM * SIMPSON RULE *
20 INPUT A,B,N
30 DEF FNF (X) = SIN (X)
40 LET H= (B-A) / N : LET M=N/2-1: LET H2=2*H
50 SH = FNF (A) + FNF (B) : LET X=A-H : LET Y=A
60 FOR I=1 TO M
70 LET X=X + H2 : LET Y=Y + H2
80 LET SH = SH + 4* FNF (X) + 2* FNF(Y)
90 NEXT I
100 LET SH = SH + 4* FNF (B-H)
```

```
110 LET SH = SH * H/3
120 PRINT "S(h) = ";SH
RUN
? 0 , 1 , 10
S(h) = .459698
```

با تغییر تابع $\sin(x)$ در خط ۳۰ می‌توان تقریبی از انتگرالهای دیگر به قاعدهٔ سیمسون حساب کرد.

۶-۳-۵ خودآزمایی

۱- تقریبی از هریک از انتگرالهای زیر را به قاعدهٔ سیمسون، حساب کنید که خطای آنها از 10^{-3} کمتر باشد.

(آ) $\int_0^1 e^x\,dx$ (ب) $\int_1^2 xe^x\,dx$

(پ) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ (ت) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

۲- حدود h را برای محاسبهٔ تقریبی

$$\int_0^1 e^x \sin x\,dx$$

چنان تعیین کنید که:

الف ـ داشته باشیم

$$|ET(h)| < 10^{-5}$$

ب ـ داشته باشیم

$$|S(h)| < 10^{-5}$$

۳- برای تمرین ۲ ، $T(h)$ و $S(h)$ را به ازای h های مناسب، حساب کنید (به کمک برنامه‌های کامپیوتر که در همین فصل ارائه شده است). ضمناً مقدار واقعی انتگرال را هم به دست آورید (به کمک انتگرال جزء به جزء) و با مقادیر تقریبی مقایسه کنید.

۵ـ۴ قاعدهٔ نقطه میانی

روشهای انتگرالگیری ذوزنقه‌ای و سیمسون که تاکنون شرح داده‌ایم از نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ انتگرالگیری استفاده می‌کنند. بنابراین، محاسبهٔ تقریبهایی از انتگرالهای نظیر

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \qquad\qquad \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

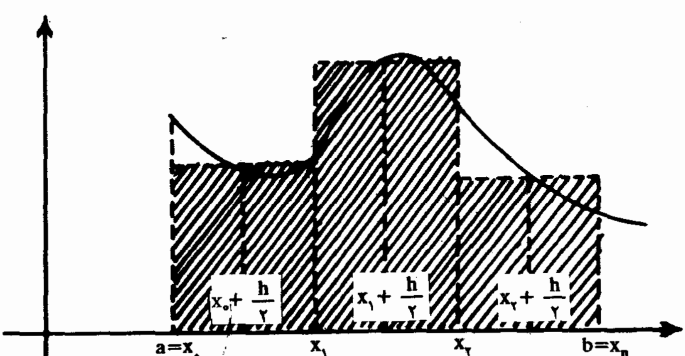
به این روشها میسر نیست. در این قسمت روش ساده‌ای را شرح می‌دهیم که می‌توان تقریبهایی از $\int_a^b f\,(x \circ dx$ را، وقتی $f(a)$ یا $f(b)$ نامعین هستند، به وسیلهٔ آن حساب کرد.

۵ـ۴ـ۱ فرمول قاعدهٔ نقطهٔ میانی

در این قاعده قرارمی‌دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)\,dx \simeq + h f\left(x_i + \frac{h}{۲}\right) \qquad (۵.۴۱)$$

شکل (۵ـ۲) چگونگی تقریب بالا را نشان می‌دهد.



شکل ۵ـ۲

با استفادهٔ مکرر از (۵.۴۱) فرمول این قاعده برای $\int_a^b f(x)\,dx$ به دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq hf\left[x_\circ+\frac{h}{۲}\right]+hf\left[x_۱+\frac{h}{۲}\right]+\dots+hf\left[x_{n-۱}+\frac{h}{۲}\right].$$

که با فاکتورگیری از h نتیجه می‌دهد ، M حرف اول کلمه Midpoint است،

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq M(h)=h\left(f\left(x_\circ+\frac{h}{۲}\right)+f\left(x_۱+\frac{h}{۲}\right)+\dots+f\left(x_{n-۱}+\frac{h}{۲}\right)\right) \qquad (۴۲.۵)$$

ملاحظه می‌شود که در فرمول (۴۲.۵) از مقدار تابع در $x_\circ$ و x_n یعنی a و b ، استفاده نشده است بنابراین، می‌توان آن را برای انتگرالهایی که در آنها f(a) یا f(b) تعریف نشده‌اند به کار برید.

۵ـ۴ـ۲ مثال

تقریبهایی از $\int_\circ^۱ x^۲dx$ را، به روش نقطهٔ میانی، و به ازای $\frac{۱}{۴}$, $h=\frac{۱}{۲}$ حساب کنید و خطای این مقادیر را به دست آورید. (نتایج را با مثال (۵ـ۲ـ۲) مقایسه کنید.)

حل: مقدار واقعی انتگرال برابر است با

$$\int_\circ^۱ x^۲dx=\frac{x^۳}{۳}\Big|_\circ^۱=\frac{۱}{۳}$$

به ازای $h=\frac{۱}{۲}=\circ/۵$ داریم $\frac{h}{۲}=\frac{۱}{۴}=\circ/۲۵$ در نتیجه

$$M(\circ/۵) = \circ/۵\,((\circ/۲۵)^۲+(\circ/۷۵)^۲)=\circ/۵\,(\circ/\circ۶۲۵+\circ/۵۶۲۵)$$
$$=\circ/۵+\circ/۶۲۵=\circ/۳۱۲۵$$

به ازای $h=\frac{۱}{۴}=\circ/۲۵$ داریم $\frac{h}{۲}=\circ/۱۲۵$ در نتیجه

$$M(\circ/۲۵)=\circ/۲۵\,((\circ/۱۲۵)^۲+(\circ/۳۷۵)^۲+(\circ/۶۲۵)^۲+(\circ/۸۷۵)^۲)$$
$$=\circ/۲۵\,(\circ/\circ۱۵۶۲۵+\circ/۱۴\circ۶۲۵+\circ/۳۹\circ۶۲۵+\circ/۷۶۵۶۲۵)$$
$$=\circ/۲۵+۱/۳۱۲۵=\circ/۳۲۸۱۲۵$$

$$EM(\circ/۵)=\frac{۱}{۳}-M(\circ/۵)=\frac{۱}{۳}-\circ/۳۱۲۵=\circ/\circ۲\circ۸۳ \qquad (۵D)$$

$$EM(\circ/۲۵)=\frac{۱}{۳}-M(\circ/۲۵)=\frac{۱}{۳}-\circ/۳۲۸۱۲۵=\circ/\circ\circ۵۲۱ \qquad (۵D)$$

مشاهده می‌شود که اولاً با نصف شدن h خطا $\frac{۱}{۴}$ می‌شود و ثانیاً این خطاها نصف خطاهای به دست آمده، به ترتیب $\frac{۱}{۲۴}$ و $\frac{۱}{۹۶}$، برای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای هستند (مثال ۵-۲-۲). این نتایج برای حالت کلی در (۵-۴-۴) ثابت می‌شوند.

۵-۴-۳ مثال

تقریبی از $\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ حساب کنید.

حل: اولاً مقدار واقعی انتگرال چنین به دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} = [\,۲\sqrt{x}\,]_{۰}^{۰/۰۹} = ۰/۶$$

ضمناً با استفاده از فرمول (۴۲.۵) به دست می‌آوریم (با انتخاب $h=۰/۰۳$):

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۰۳(f(۰/۰۱۵)+f(۰/۰۴۵)+f(۰/۰۷۵))$$

$$= ۰/۰۳(۸/۱۶۵۰ + ۴/۷۱۴۰ + ۳/۶۵۱۵)$$

بنابراین،

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۰۳ \times ۱۶/۵۳۰۵ = ۰/۴۹۵۹۱۵$$

مشاهده می‌شود که این مقدار تقریبی حدود ۰/۱۰۴ خطا دارد که قابل توجه است. از این‌رو، توصیه می‌شود که در نزدیکی نقاطی که f(a) یا f(b) بینهایت هستند مقدار h بسیار کوچک اختیار شود.

با انتخاب $h=۰/۰۱$ به دست می‌آوریم

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۰۱\left(\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۱۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۲۵}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۸۵}}\right)$$

$$= ۰/۵۳۹۵۸۷$$

خطای این مقدار تقریبی حدود ۰/۰۷ است. به طور کلی در چنین انتگرالهایی باید برای قسمتی که نزدیک نقطهٔ منفرد تابع است h را بسیار کوچک اختیار کرد و برای بقیه بازهٔ h را خیلی کوچک نگرفت. مثلاً، قرار دهید

$$\int_{\circ}^{\circ/\circ ۹} f(x)\,dx = \int_{\circ}^{\circ/\circ ۱} f(x)dx + \int_{\circ/\circ ۱}^{\circ/\circ ۹} f(x)\,dx$$

و برای $\int_{\circ}^{\circ/\circ ۱} f(x)dx$ مقدار h را ۰/۰۰۲ و برای $\int_{\circ/\circ ۱}^{\circ/\circ ۹} f(x)\,dx$ مقدار h را ۰/۰۲ در نظر بگیرید، با این انتخابها به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{\circ/\circ ۱} f(x)\,dx &\simeq \circ/\circ\circ ۲\left(\frac{۱}{\sqrt{\circ/\circ\circ ۱}}+\frac{۱}{\sqrt{\circ/\circ\circ ۳}}+\frac{۱}{\sqrt{\circ/\circ\circ ۵}}+\frac{۱}{\sqrt{\circ/\circ\circ ۷}}+\frac{۱}{\circ/\circ\circ ۹}\right)\\ &= \circ/\circ\circ ۲(۳۱/۶۲۲۸+۱۸/۲۵۷۴+۱۴/۱۴۲۱+۱۱/۹۵۲۳+۱\circ/۵۴\circ ۹)\\ &= \circ/۱۷۳\circ ۳۱\end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}\int_{\circ/\circ ۱}^{\circ/\circ ۹} f(x)\,dx &\simeq \circ/\circ ۲\left(\frac{۱}{\sqrt{\circ/\circ ۲}}+\frac{۱}{\sqrt{\circ/\circ ۴}}+\frac{۱}{\sqrt{\circ/\circ ۶}}+\frac{۱}{\sqrt{\circ/\circ ۸}}\right)\\ &= \circ/\circ ۲(۷/\circ ۷۱۱+۵+۴/\circ ۸۲۵+۳/۵۳۵۵)\\ &= \circ/\circ ۲\times ۱۹/۶۸۹۱ = \circ/۳۹۳۷۸۲\end{aligned}$$

پس،

$$\int_{\circ}^{\circ/\circ ۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq \circ/۱۷۳\circ ۳۱+\circ/۳۹۳۷۸۲ = \circ/۵۶۶۸۱۳$$

اختلاف این مقدار، با مقدار واقعی ۰/۶ ، برابر است با ۰/۰۳۳۱۸۷ . اما، برای کم کردن خطا، h را باید کوچک گرفت، که در این صورت نیاز به کامپیوتر خواهد بود تا تعداد زیاد جملات را حساب کند.

۵-۴-۴ خطای قاعدهٔ نقطهٔ میانی

ابتدا خطای تقریب (۴۱.۵) را حساب می‌کنیم. برای این منظور داریم:

$$f\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)=f_i+\frac{h}{۲}f'_i+\frac{\left(\frac{h}{۲}\right)^۲}{۲}f_i''+\dots \qquad (۴۳.۵)$$

همچنین با توجه به (۳۵.۵)

$$\int_{x}^{x_{i+۱}} f(x)\,dx=\left[x f_i+\frac{\left(x-x_i\right)^۲}{۲}f'_i+\frac{\left(x-x_i\right)^۳}{۶}f''_i+\dots\right]_{x_i}^{x_{i+۱}}$$

که با توجه به این که $x_{i+۱}-x_i=h$ چنین به دست می‌آید:

$$\int_{x}^{x_{i+۱}} f(x)dx=h f_i+\frac{h^۲}{۲}f'_i+\frac{h^۳}{۶}f''_i+\dots \qquad (۴۴.۵)$$

از تفریق (۴۳.۵) و (۴۴.۵) داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)\,dx-hf\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)=\frac{h^۳}{۲۴}f''_i+\dots\simeq\frac{h^۳}{۲۴}f_i'' \qquad (۴۵.۵)$$

با مقایسهٔ (۴۵.۵) و (۲۳.۵) نتیجه می‌گیریم که خطای قاعدهٔ نقطهٔ میانی نصف خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای است. برای تعیین خطای کل چنین ادامه می‌دهیم:

$$EM(h)=\left(\int_{x_۰}^{x_۱} f(x)\,dx-f\left(x_۰+\frac{h}{۲}\right)\right)+\dots+\left(\int_{x_{n-۱}}^{x_n} f(x)\,dx-f\left(x_{n-۱}+\frac{h}{۲}\right)\right)$$
$$\simeq\frac{h^۳}{۲۴}\left(f''_۰+f''_۱+\dots+f''_{n-۱}\right)$$

که با استفاده از قضیهٔ (۵-۲-۷) نتیجه می‌دهد

$$EM(h)\simeq\frac{h^۳}{۲۴}\times n f''(\eta) \qquad \left(x_۰\le\eta\le x_n\right)$$

چون $nh = b-a$، پس

$$EM(h) \simeq \frac{(b-a)h^{۲}}{۲۴} f''(\eta) \qquad (a \le \eta \le b)$$

و یا

$$|EM(h)| \le \frac{(b-a)}{۱۲} h^{۲} M_{۲} \tag{۴۶.۵}$$

که در آن $M_{۲}$ در (۵.۳۰) تعریف شده است. البته، (۴۶.۵) وقتی مفید است که $M_{۲}$ متناهی باشد.

۴-۴-۵ خصوصیات روش نقطهٔ میانی

این روش ظاهراً بهتر از روش ذوزنقه‌ای است زیرا خطای آن نصف خطای روش ذوزنقه‌ای است و از یک مقدار تابع نیز کمتر استفاده می‌کند. علاوه بر این، برای انتگرال توابعی که در نقاط a یا b مقدار نامعین (بینهایت) دارند قابل استفاده است. اما، قاعدهٔ ذوزنقه‌ای خاصیت جالبی دارد که نه روش نقطهٔ میانی و نه قاعدهٔ سیمسون آن خاصیت را ندارند. فرض کنید به ازای h ثابتی $T(h)$ و $M(h)$ را حساب کرده‌اید. در $T(h)$ نقاطی که تابع در آنها باید حساب شود، عبارت‌اند از:

$a, a+h, a+۲h, \ldots, a+(n-۱)h, b$

و در $M(h)$ نقاط عبارتند از:

$$a+\frac{h}{۲}, a+\frac{۳h}{۲}, \ldots, a+(n-۱)h+\frac{h}{۲}$$

حال اگر بخواهیم $T(\frac{h}{۲})$ و $M(\frac{h}{۲})$ را به دست آوریم، داریم:

برای $T\left(\frac{h}{۲}\right)$: $\underline{a}, a+\frac{h}{۲}, \underline{a+h}, a+\frac{۳h}{۲}, \ldots, \underline{a+(n-۱)h}, a+(n-۱)h+\frac{h}{۲}, \underline{b}$

برای $M\left(\frac{h}{۲}\right)$: $a+\frac{h}{۴}, a+\frac{۳h}{۴}, a+\frac{۵h}{۴}, \ldots, b-\frac{h}{۴}$

مشاهده می‌شود که تمام نقاطی که برای محاسبهٔ $T(h)$ به کار می‌روند در محاسبه $T(\frac{h}{۲})$ نیز دیده می‌شوند (زیر آنها خط کشیده شده است). بنابراین، برای محاسبهٔ $T(\frac{h}{۲})$، می‌توان از مقادیر تابع که قبلاً حساب شده است استفاده کرد. ولی، هیچ‌کدام از نقاطی که در محاسبهٔ $M(\frac{h}{۲})$ به کار می‌روند از نقاطی که در محاسبهٔ $M(h)$ به کار رفته‌اند نیستند! برای قاعدهٔ سیمسون نیز ضریب

مقادیر چنان است که نمی‌توان از محاسبات قبلی کمک گرفت $S(\frac{h}{2})$ را به کمک $S(h)$ حساب کرد. از خاصیت بالا در پیدا کردن مقادیر دقیقتر برای $\int_a^b f(x)\,dx$ ، با استفاده از مقادیر نادقیق $T(h)$ ، استفاده می‌شود. اشکال دیگر قاعدهٔ نقطهٔ میانی آن است که ممکن است نتوان آن را برای برآورد مقدار انتگرال یک تابع جدولی به‌کار برد، زیرا اگر مقدار تابع در نقاطی که در جدول نیست لازم باشد ابتدا باید از درونیابی استفاده و این مقادیر را برآورد کرد.

۵ـ۴ـ۵ مثال

تقریبی از $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر، و روش نقطهٔ میانی حساب کنید.

x_i	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲
f_i	۱	۱/۲۲۱۴	۱/۴۹۱۸	۱/۸۲۲۱	۲/۲۲۵۵	۲/۷۱۸۳	۳/۳۲۰۱

حل: برای استفاده از روش نقطهٔ میانی و جدول مقادیر بالا، تنها می‌توان h را ۰/۴ اختیار کرد. با انتخاب $h=0/4$ مقادیر تابع در نقاط زیر

۰/۲ ، ۰/۶ ، ۱

مورد نیاز است. بنابراین،

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx \simeq 0/4\,(f(0/2)+f(0/6)+f(1)) = 2/3042$$

اگر بخواهیم از $h=0/2$ استفاده کنیم مقدار تابع در نقاط زیر مورد نیاز است

۰/۱ ,۰/۳ ,۰/۵ ,۰/۷ ,۰/۹ ,۱/۱

که هیچ‌کدام در جدول نیستند و باید مقادیر تابع را در این نقاط به کمک درونیابی برآورد کرد!

۵ـ۴ـ۶ مثال

تقریبی از $\int_0^1 \cos x\,dx$ را به قاعده نقطه میانی حساب کنید که خطای آن کمتر از 10^{-3} باشد.

حل: ابتدا باید M_2 را حساب کرد. برای این منظور حساب می‌کنیم

$$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f''(x) = -\cos x$$
$$|f''(x)| \leq ۱ = M_۲$$

لذا، h را چنان تعیین می‌کنیم که

$$\frac{b-a}{۲۴} h^۲ M_۲ = \frac{h^۲}{۲۴} \leq ۱۰^{-۳}$$

از اینجا به دست می‌آید $۰ < h \leq ۰/۱۵۵$، که در نتیجه

$$n = \frac{b-a}{h} \leq \frac{۱}{۰/۱۵۵} = ۶/۴۵۱۶$$

پس، قرارمی‌دهیم $n=۷$ یا $h \simeq ۰/۱۴۲۸۶$. با استفاده از این h مقدار $M(h)$ را به دست می‌آوریم:

$$M(h) = ۰/۱۴۲۸۶ (\cos(۰/۰۷۱۴۳) + \cos(۰/۲۱۴۲۹) + ... + \cos(۰/۹۲۸۵۹))$$
$$= ۰/۱۴۲۸۶ (۰/۹۹۴۵۰ + ۰/۹۷۷۱۳ + ۰/۹۳۶۹۰ + ۰/۸۷۷۵۸$$
$$+ ۰/۸۰۰۳۸ + ۰/۷۰۶۸۷ + ۰/۵۹۸۹۶)$$
$$= ۰/۱۴۲۸۶ \times ۵/۸۹۲۳۲ = ۰/۸۴۱۷۸ \ (۵D)$$

مقدار واقعی عبارت است از:

$$\int_۰^۱ \cos x \, dx = \sin x \Big|_۰^۱ = \sin ۱ = ۰/۸۴۱۴۷ \qquad (۵D)$$

مشاهده می‌شود که

$$\int_۰^۱ \cos x \, dx - ۰/۸۴۱۷۸ = ۰/۸۴۱۴۷ - ۰/۸۴۱۷۸ = ۰/۰۰۰۶۹ < ۱۰^{-۳}$$

۵-۴-۷ خودآزمایی

۱- تقریبهایی از انتگرالهای زیر را، به قاعدهٔ نقطهٔ میانی، و به ازای hهای معین شده، حساب کنید.

$$\int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x} \quad , \quad h = ۰/۱$$

$$\int_{\circ}^{1}\frac{dx}{1+x^{2}} \quad , \quad h=\circ/2$$

$$\int_{\circ}^{1}\frac{\sin x}{x}dx \quad , \quad h=\circ/2$$

۲ـ تقریبی از انتگرالهای زیر را حساب کنید که برای آنها $|EM(h)|<10^{-3}$

(آ) $\int_{\circ}^{1} x\sin x\, dx$ (ب) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^{2}}$

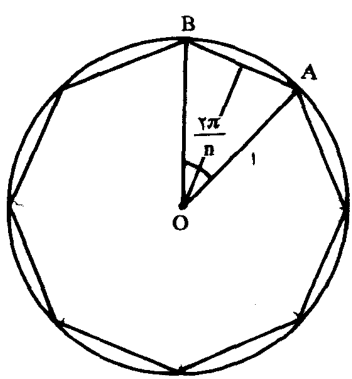
۳ـ تقریبی از $\int_{\circ}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$ را حساب کنید. (برای این منظور قراردهید

$$\int_{\circ}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\int_{\circ}^{\circ/1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}+\int_{\circ/1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

سپس برای $\int_{\circ}^{\circ/1} f(x)\,dx$ مقدار h را ۰/۰۱ و برای $\int_{\circ/1}^{1} f(x)\,dx$ مقدار h را ۰/۱ بگیرید.)

۴ـ دایره‌ای به شعاع واحد داریم. محیط این دایره را به n قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و محیط n ضلعی محدب حاصل را P_n می‌نامیم. (واضح است که محیط دایره برابر 2π است.) ثابت کنید (ابتدا ضلع AB را به دست آورید)

$$P_n=2n\,\sin\frac{180^\circ}{n}$$



و بعد نشان دهید که (از بسط $\sin x$ استفاده کنید)

$$۲\pi - P_n = \frac{\pi^۳}{۳} \times \frac{۱}{n^۲} - \frac{\pi^۵}{۶۰} \times \frac{۱}{n^۴} + - \ldots$$

و نتیجه بگیرید که اگر $h=\frac{۱}{n}$ آنگاه

$$۲\pi - p_n = a_۲h^۲ + a_۴h^۴ + a_۶h^۶ + \ldots$$

که در آن a_iها مقادیر ثابت و مستقل از h هستند. تقریبی از ۲π را به دست آورید که خطای آن کمتر از $۱۰^{-۷}$ باشد. (جواب: ۶/۲۸۳۱۸۵۲۱)

۵ـ برای به دست آوردن $M(h)$، با داشتن a، b و h یک برنامه کامپیوتری بنویسید و به کمک آن تقریبی از $\int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{x}} = ۲$ را، به ازای $h=۰/۰۰۱$، حساب کنید.

۵ـ۵ قاعدهٔ رامبرگ

با استفاده از قاعدهٔ رامبرگ، و به کمک مقادیر تقریبی که از روشهای سادهای همچون قاعدهٔ ذوزنقهای و قاعده سیمسون برای $\int_a^b f(x)\,dx$ حساب میشود، و بدون محاسبهٔ تابع f در نقاط اضافی، میتوان تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)\,dx$ حساب کرد. اساس این روش بر این مطلب استوار است که میدانیم

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = T(h) + a_۲h^۲ + a_۴h^۴ + a_۶h^۶ + \ldots \qquad (۴۷.۵)$$

که در آن a_i ها مستقل از h و متناسب با مشتق iام تابع f هستند. (برای اثبات به [۱۹] مراجعه کنید.)

اگر در (۴۷.۵)، h را به $\frac{h}{۲}$ تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$I = T\left(\frac{h}{۲}\right) + a_۲\left(\frac{h}{۲}\right)^۲ + a_۴\left(\frac{h}{۲}\right)^۴ + a_۶\left(\frac{h}{۲}\right)^۶ + \ldots \qquad (۴۸.۵)$$

برای حذف $a_۲$ از معادلات (۴۷.۵) و (۴۸.۵) معادلهٔ (۴۷.۵) را از چهار برابر (۴۸.۵) کم میکنیم تا حاصل شود

$$۴I-I=۴T\left(\frac{h}{۲}\right)-T\left(\frac{h}{۲}\right)+\frac{a_۴}{۴}h^۴-a_۴h^۴+\frac{a_۶}{۱۶}h^۶-a_۶h^۶+\dots$$

در نتیجه

$$I=\frac{۴T\left(\frac{h}{۲}\right)-T(h)}{۳}-\frac{a_۴}{۴}h^۴-\frac{۵a_۶}{۱۶}h^۶+\dots \qquad (۴۹.۵)$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که مقدار

$$\frac{۴T\left(\frac{h}{۲}\right)-T(h)}{۳}$$

تقریبی از I است که خطای آن متناسب با $h^۴$ است (خطای $T(h)$ و $T(\frac{h}{۲})$ متناسب با $h^۲$ است).

۵ـ۵ـ۱ مثال

تقریبهایی از $\int_۰^۱ x^۳dx$ را به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و با $h=۱,\frac{۱}{۲}$ حساب کنید و بعد به قاعدهٔ رامبرگ تقریب بهتری با استفاده از دو مقدار تقریبی حاصل را به دست آورید.

حل: داریم

$$T(۱)=\frac{۱}{۲}(۰^۳+۱^۳)=\frac{۱}{۲}$$

$$T\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}\left(۰^۳+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳+۱^۳\right)=\frac{۵}{۱۶}$$

و بنابر قاعدهٔ رامبرگ داریم:

$$\frac{۴T\left(\frac{۱}{۲}\right)-T(۱)}{۳}=\frac{\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

از طرف دیگر، $\int_۰^۱ x^۳dx=\frac{۱}{۴}$ یعنی تقریبی که از قاعدهٔ رامبرگ به دست می‌آید با مقدار واقعی انتگرال مساوی است. این نتیجه با استفاده از (۴۹.۵) قابل توجیه است. زیرا، خطای کسر بالا مساوی است با

$$a'_۴h^۴+a'_۶h^۶+\dots$$

که در آن a'_i متناسب با مشتق iام تابع $f(x)=x^۳$ است. اما می‌دانیم که از مشتق مرتبهٔ چهارم به

بعد این تابع صفر است، در نتیجه، مقدار کسر با مقدار واقعی انتگرال برابر است.

قاعدهٔ رامبرگ برای هر دنباله از اعداد تقریبی که خطای آنها در رابطه‌ای به شکل (۴۷.۵) صدق کند قابل اجراست.

۲-۵-۵ تعمیم قاعدهٔ رامبرگ

در عمل تلفیقی از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و قاعدهٔ رامبرگ به کار می‌رود. ابتدا به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مقادیر زیر حساب می‌شود

$$h_0=(b-a) \quad : \quad T(h_0)=T_{00}$$

$$h_1=\frac{b-a}{2}=\frac{h_0}{2} \quad : \quad T(h_1)=T_{01}$$

$$h_2=\frac{b-a}{2^2} \quad : \quad T(h_2)=T_{02}$$

$$\vdots$$

$$h_{k-1}=\frac{b-a}{2^{k-1}} \quad : \quad T(h_{k-1})=T_{0(k-1)}$$

$$h_k=\frac{b-a}{2^k} \quad : \quad T(h_k)=T_{0k}$$

خطای T_{0i} متناسب با h_i^2 است. بعد به قاعدهٔ رامبرگ و به کمک T_{0i} ها مقادیر زیر را به دست می‌آوریم، که خطای هریک متناسب با h^4 است.

$$T_{10}=\frac{4T_{01}-T_{00}}{3}$$

$$T_{11}=\frac{4T_{02}-T_{01}}{3}$$

$$\vdots$$

$$T_{1(k-1)}=\frac{4T_{0k}-T_{0(k-1)}}{3}$$

می‌توان باز هم به کمک T_{1i} ها تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)\,dx$ حساب کرد. برای این منظور (۴۹.۵) را چنین می‌نویسیم، برای h_i به جای h،

$$I=T_{1i}+a'_4h_i^4+a'_6h_i^6+\dots \tag{۵۰.۵}$$

اگر در تساوی بالا به جای h_i مقدار $\frac{h_i}{2}$ را قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$I = T_{1(i+1)} + a'_4\left(\frac{h_i}{2}\right)^4 + a'_6\left(\frac{h_i}{2}\right)^6 + \dots \qquad (۵۱.۵)$$

حال (۵۰.۵) را از ۴^۲ برابر (۵۱.۵) کم می‌کنیم تا حاصل شود

$$I = 4^2\frac{T_{1(i+1)} - T_{1i}}{4^2 - 1} + a''_6 h^6 + \dots$$

که در آن a''_6 مستقل از h و متناسب با مشتق ششم تابع f است. به این ترتیب بعد از محاسبهٔ T_{1i}ها به محاسبهٔ T_{2i}ها (T_{2i} را، تِ دو آی بخوانید) به قرار زیر، می‌پردازیم.

$$T_{20} = \frac{4^2T_{11} - T_{10}}{4^2 - 1}$$

$$T_{21} = \frac{4^2T_{12} - T_{11}}{4^2 - 1}$$

$$\vdots$$

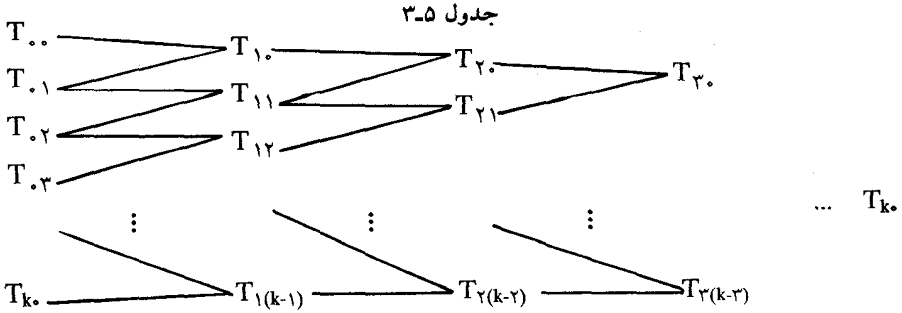
$$T_{2i} = \frac{4^2T_{1(i+1)} - T_{1i}}{4^2 - 1}$$

در مرحلهٔ Pام از قاعدهٔ رامبرگ داریم

$$T_{pi} = \frac{4^p T_{(p-1)(i+1)} - T_{(p-1)i}}{4^p - 1} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, \qquad p = 1, 2, 3, \dots$$

و خطای T_{pi} متناسب با h_i^{2p+2} است و برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ $2p+1$ دقیق است. با استفاده از فرمول بالا اعداد جدول زیر حساب می‌شوند:

جدول ۵ـ۳



ثابت می‌شود که، به [۱۹] رجوع کنید،

$$\lim_{P\to\infty} T_{p\circ}=\int_a^b f(x)\,dx$$

بنابراین، در عمل $T_{p\circ}$ها را حساب می‌کنیم و وقتی، برای ε مفروض، داشته باشیم

$$\left| T_{(p+1)\circ}-T_{p\circ}\right| <\varepsilon$$

عملیات را متوقف و $T_{(p+1)\circ}$ را به عنوان تقریبی از $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌پذیریم. توجه داشته باشید که T_{pi} به کمک $T_{\circ i}$ های اولیه که از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای حاصل می‌شوند به دست می‌آید و نیازی به محاسبهٔ مجدد تابع ندارد.

۳ـ۵ـ۵ برنامهٔ قاعدهٔ رامبرگ

برای تعیین تقریبی از $\int_a^b f(x)\,dx$ به قاعدهٔ رامبرگ باید $T_{(p+1)\circ}$ و $T_{p\circ}$ را چنان حساب کرد که

$$\left| T_{(p+1)\circ}-T_{p\circ}\right| <\varepsilon$$

برای این منظور فقط یک متغیر اندیس‌دار به نام T اختیار می‌کنیم. ابتدا قرارمی‌دهیم

$$T(\circ)=\frac{(b-a)}{۲}(f(a)+f(b))$$

$$T(۱)=\frac{b-a}{۴}\left(f(a)+۲f\left(\frac{a+b}{۲}\right)+f(b)\right)$$

بعد TEMP را حساب می‌کنیم، که در واقع $T_{۱\circ}$ است.

$$\text{TEMP}=\frac{۴T(۱)-T(\circ)}{۴^{۱}-۱}$$

سپس $|\text{TEMP}-T(\circ)|$ را با ε مقایسه می‌کنیم، اگر شرط خاتمه برقرار نبود به طریق زیر ادامه می‌دهیم.

چون دیگر به $T(\circ)$ نیازی نداریم TEMP را در آن ذخیره می‌کنیم (روی آن می‌نویسیم).
بعد $T(۲)$ را مساوی $T(\frac{b-a}{۸})$ می‌گیریم و از فرمول مربوط $T_{۲\circ}$ را محاسبه می‌کنیم و در TEMP

قرارمی‌دهیم.
ضمناً از این خصوصیت که مقادیر داخل پرانتزهای $T(\circ)$ دقیقاً در پرانتزهای طرف دوم $T(1)$ آمده است استفاده می‌کنیم.

برنامه‌ای که مشاهده می‌کنید برای تخمین $\int_0^1 e^x \sin x\, dx$ و به ازای $\varepsilon=0/0000001$ نوشته و اجرا شده است. تقریب نهایی برابر ۰/۹۰۹۳۳۰۷ است.
(این مقدار را با مقدار واقعی $\int_0^1 e^x \sin x\, dx$ مقایسه کنید.)

```
10 INPUT A,B,EPS
20 DEF FNF (X) = EXP (X)* SIN (X)
30 H=B-A
40 CP= (FNF (A) + FNF (B))/2
50 T(0)=H*CP : PRINT T(0)
60 FOR I=1 TO 10
70 H=H/2 : M=2^ I-1
80 FOR J=1 TO M STEP 2
90 CP = CP + FNF (A+J*H)
100 NEXT J
110 T(I) = H*CP:PRINT T(I) ;
120 FOR P=I-1 TO 1 STEP - 1
130 L=I-P
140 T(P) = (4^L*T(P+1) - T(P) / (4^L-1): PRINT T(P) ;
150 NEXT P
160 TEMP = (4^I*T(1) - T(0)) / (4^I-1): PRINT TEMP
170 IF ABS (TEMP - T(0) <EPS THEN END
180 T(0)= TEMP
190 NEXT I
1.143678
.9670583 .9081852
```

.9237047 .9092534 . 9093246

.9129206 .9093258 .9093306 .9093308

.9102279 .9093304 .9093307 .9093307 .9093307

لازم به ذکر است که در برنامهٔ بالا حداکثر $T\left(\frac{b-a}{2^{10}}\right)$ یعنی $T_{(10)0}$ حساب می‌شود.

با تغییر عبارت مربوط به تابع، در خط ۲۰، می‌توان تقریبی از $\int_a^b f(x)dx$ را به قاعدهٔ رامبرگ حساب کرد. با اجرای برنامه مشاهده خواهید کرد که هم از نظر صرفه‌جویی در حافظه و هم از نظر محاسبات بسیار اقتصادی است.

۴-۵-۵ مثال

تقریبهایی از $\int_0^2 x^5 dx$ را به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به ازای $h=2,1,\frac{1}{2}$ حساب کنید و با استفاده از مقادیر حساب شده، و به قاعدهٔ رامبرگ، تقریبی بهتر برای این انتگرال به دست آورید.

حل: داریم، $a=0$ ، $b=2$ و $f(x)=x^5$ بنابراین،

$$T(2)=\frac{2}{2}(0^5+2^5)=32$$

$$T(1)=\frac{1}{2}(0^5+2(1)^5+2^5)=17$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(0^5+2\left(\frac{1}{2}\right)^5+2(1)^5+2\left(\frac{3}{2}\right)^5+2^5\right)=\frac{197}{16}$$

حال جدولی نظیر جدول (۵-۳) تشکیل می‌دهیم

$$T_{00}=32 \qquad T_{01}=17 \qquad T_{02}=\frac{197}{16}$$

$$T_{10}=\frac{4\times 17-32}{3}=12 \qquad T_{11}=\frac{\frac{197}{4}-17}{3}=\frac{43}{4}$$

$$T_{20}=\frac{4^2\times\frac{43}{4}-12}{4^2-1}=\frac{32}{3}$$

از طرف دیگر

$$\int_0^2 x^5 dx=\frac{x^6}{6}\Big|_0^2=\frac{32}{3}$$

مشاهده می‌شود که مقدار T_{20} دقیقاً با مقدار انتگرال برابر است و این بدین‌خاطر است که T_{20} برای توابع تا درجهٔ ۵=۱+۲×۲ دقیق است (یعنی خطایش صفر است!)

۵-۵-۵ خودآزمایی

۱- تقریبهایی از انتگرالهای زیر، به ازای hهای مشخص شده، حساب کنید و بعد به قاعدهٔ رامبرگ تقریبهای بهتری برای انتگرالها به دست آورید.

(آ) $\int_0^1 \frac{dx}{\cos x}$ $\qquad h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

(ب) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ $\qquad \left(\frac{\sin 0}{0} = 1\right) \qquad h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

(پ) $\int_0^1 e^x \cos x \, dx$ $\qquad h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

۲- مقادیر p_4، p_8، p_{16} و p_{32} را از تمرین ۳ مندرج در (۵-۴-۷) حساب کنید و با توجه به خطای P_n و به کمک قاعدهٔ رامبرگ تقریب بهتری برای 2π به دست آورید.

۳- تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ به قاعدهٔ رامبرگ حساب کنید که داشته باشیم

$$\left| T_{P0} - T_{(P-1)0} \right| < 10^{-6}$$

۴- برای قاعدهٔ سیمسون می‌دانیم که، (ر.ک. [۱۹])

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = S(h) + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots$$

همانند آنچه در (۵-۵) عمل شد، نشان دهید که

$$\frac{16 S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h)}{15}$$

تقریبی از I است که خطای آن متناسب با h^6 است و برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ ۵ دقیق است

(تعمیم دهید).

۵ـ۶ قاعده‌های دقیقتر

اگر به فرمول قاعدهٔ ذوزنقه‌ای توجه کنید مشاهده می‌کنید که

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{۲}f_i + \frac{h}{۲}f_{i+۱} = \sum_{k=i}^{i+۱} w_k f_k$$

که خطای آن نیز $-\frac{h^۳}{۱۲}f''(\eta)$ است.
و همچنین از فرمول قاعده سیمسون نتیجه می‌شود که

$$\int_{x_i}^{x_{i+۲}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{۳}f_i + \frac{۴h}{۳}f_{i+۱} + \frac{h}{۳}f_{i+۲} = \sum_{k=i}^{i+۲} w_k f_k$$

و خطای آن $-\frac{h^۵}{۹۰}f^{(۴)}(\eta)$ است.
بنابراین، به طور کلی، به دنبال قواعدی می‌گردیم که در آنها

$$\int_{x}^{x_m} f(x)\,dx = \sum_{k=۰}^{m} w_k f_k + E \qquad (۵۲.۵)$$

در اینجا آنچه می‌تواند مجهول باشد نقاط $x_۰, x_۱, \ldots, x_m$ و ضرایب $w_۰$ ، $w_۱$ ، ...، w_m است، که در اینجا دو روش برای محاسبهٔ آنها ارائه می‌کنیم. E نیز خطای $\sum_{k=۰}^{m} w_k f_k$ است.

۵ـ۶ـ۱ روش نیوتن ـ کوتز

در این روش نقاط $x_۰$، $x_۱$، ...، x_m معلوم فرض می‌شوند، مثلاً متساوی الفاصله و به صورت

$$x_{i+۱} - x_i = h \quad , \quad i = ۰,۱,\ldots,m-۱$$

بنابراین باید $(m+۱)$ مجهول $w_۰, \ldots, w_m$ به دست آید. برای این منظور، در (۵۲.۵)، قرار می‌دهیم:

$$E = ۰$$

وقتی که

$$f(x) = ۱, x, \ldots, x^m$$

یعنی، w_i ها را چنان پیدا می‌کنیم که خطای $\sum_{k=۰}^{m} w_k f_k$ برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ m

صفر باشد. در زیر فرمول قاعدهٔ چهارنقطه‌ای یا قاعده $\frac{3}{8}$ را به دست می‌آوریم. برای این منظور، بدون این که به کلیت خللی وارد شود قرار می‌دهیم $x_0=0$، بنابراین، باید داشته باشیم

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{3} w_k f_k + E$$

که در آن $x_i=ih$، یعنی

$$x_0=0 \quad , \quad x_1=h \quad , \quad x_2=2h \quad , \quad x_3=3h \ .$$

حال برای به دست آوردن w_0 تا w_3 قرار می‌دهیم $E=0$ وقتی که

$$f(x) = 1 \ , \ x \ , \ x^2 \ , \ x^3$$

به این ترتیب چهار معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$f(x)=1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{3h} 1\,dx = 3h = w_0+w_1+w_2+w_3$$

$$f(x)=x \quad \Rightarrow \quad \int_0^{3h} x\,dx = \frac{9h^2}{2} = hw_1+2hw_2+3hw_3$$

$$f(x)=x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{3h} x^2dx = 9h^3 = h^2w_1+4h^2w_2+9h^2w_3$$

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{3h} x^3dx = \frac{81h^4}{4} = h^3w_1+8h^3w_2+27h^3w_3 \quad ,$$

که پس از خلاصه کردن دستگاه زیر حاصل می‌شود

$$\begin{cases} w_0+w_1+w_2+w_3=3h \\ w_1+2w_2+3w_3=\frac{9h}{2} \\ w_1+4w_2+9w_3=9h \\ w_1+8w_2+27w_3=\frac{81h}{4} \end{cases} \qquad (۵۳.۵)$$

معادلات سوم و چهارم، پس از حذف w_1 به کمک یک معادلهٔ دوم، به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{cases} 2w_2+6w_3=\frac{9}{2}h \\ 6w_2+24w_3=\frac{63h}{4} \end{cases} \qquad (54.5)$$

اگر w_2 را نیز از معادلهٔ دوم دستگاه اخیر حذف کنیم حاصل می‌شود:

$$6w_3=\frac{9h}{4}$$

بنابراین، $w_3=\frac{3h}{8}$

از معادلهٔ اول (۵۴.۵) به دست می‌آید

$$w_2=\frac{9h}{8}$$

سپس از معادلهٔ دوم، (۵۳.۵) حاصل می‌شود

$$w_1=\frac{9h}{8}$$

و بالاخره از معادلهٔ اول (۵۳.۵) به دست می‌آوریم

$$w_0=\frac{3h}{8}$$

بنابراین فرمول چهار نقطه‌ای عبارت است از

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx \simeq \frac{3h}{8}(f(0)+3f(h)+3f(2h)+f(3h))$$

که با تغییر متغیر $X=x_0+x$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \simeq \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$$

که در آن، طبق معمول ، $f_i=f(x_i)$ و $x_i=x_0+ih$.

روش فوق به **روش ضرایب مجهول** نیز معروف است.

فرمولهای نیوتن ـ کوتز پنج نقطه‌ای و ... نیز به همین ترتیب به دست می‌آیند. در زیر جدول مربوط به این فرمولها، ضرایب و خطای آنها، آمده است. به طور کلی داریم

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = A_0 \sum_{k=0}^{m} a_k f_k + A_1 h^{l+1} f^{(l)}(\eta) \qquad (۵۵.۵)$$

که در آن $\eta \in [x_0, x_m]$ و

$$l = \begin{cases} m+1 & \text{اگر } m \text{ فرد باشد و} \\ m+2 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد و} \end{cases}$$

پس، بهتر است از فرمولهایی استفاده کنیم که در آنها m زوج است.

جدول (۵-۴)

m	A_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1
۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	۱				$-\frac{۱}{۱۲}$
۲	$\frac{۱}{۳}$	۱	۴	۱			$-\frac{۱}{۹۰}$
۳	$\frac{۳}{۸}$	۱	۳	۳	۱		$-\frac{۳}{۸۰}$
۴	$\frac{۲}{۴۵}$	۷	۳۲	۱۲	۳۲	۷	$-\frac{۸}{۹۰۵}$
۵	$\frac{۵}{۲۸۸}$	۱۹	۷۵	۵۰	۵۰	۷۵	$-\frac{۲۷۵}{۲۰۹۶}$
۶	$\frac{۱}{۱۴۰}$	۴۱	۲۱۶	۲۷	۲۷۲	۲۷	$-\frac{۹}{۱۴۰۰}$
۷	$\frac{۷}{۱۷۲۸۰}$	۷۵۱	۳۵۷۷	۱۳۲۳	۴۹۸۹	۲۹۸۹	$-\frac{۸۱۸۳}{۵۱۸۴۰۰}$
۸	$\frac{۴}{۱۴۱۷۵}$	۹۸۹	۵۸۸۸	-۹۲۸	۱۰۹۴۸	-۴۵۴۰	$-\frac{۲۳۶۸}{۴۶۷۷۷۵}$

آنچه از جدول (۵ ـ ۴) نتیجه می‌شود آن است که ضرایب جملات متساوی البعد از طرفین برابرند. تا m=۷ ضرایب همگی مثبت ولی برای m=۸ بعضی از ضرایب منفی هستند. اصولاً توصیه می‌شود، با توجه به این که محاسبهٔ f_iها توأم با خطاست و برای mهای بزرگ ضرایب a_i ممکن است منفی باشند، فرمولهای نیوتن ـ کوتز را برای mهای کوچک به کار برید. بخصوص

m های زوج را اختیار کنید. مثلاً، باتوجه به (۵۵.۵) فرمولهای ۳ نقطه‌ای (یعنی قاعدهٔ سیمسون) و ۴ نقطه‌ای (یعنی قاعدهٔ $\frac{۳}{۸}$) هر دو برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ سوم دقیق هستند. اما، روش سیمسون از یک نقطه کمتر استفاده می‌کند و قدر مطلق خطای آن (یعنی، $\frac{۱}{۹۰}$) از قدر مطلق خطای قاعدهٔ $\frac{۳}{۸}$ (یعنی $\frac{۳}{۸۰}$) نیز کوچکتر است (به جدول (۵-۴) مراجعه کنید).

۵-۶-۲ روش گاوس

در این روش نقاط و ضرایب همگی مجهول فرض می‌شوند پس در فرمول

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=۰}^{m} w_k f(x_k) + E$$

(m+۱) نقطهٔ $x_۰, \ldots, x_m$ و (m+۱) ضریب $w_۰, \ldots, w_m$ مجهول هستند. جهت به دست آوردن این ۲m+۲ مجهول قرارمی‌دهیم $E=۰$ برای

$f(x) = ۱, x, x^۲, \ldots, x^{۲m+۱}$

به عبارت دیگر کاری می‌کنیم که $\sum_{k=۰}^{m} w_k f(x_k)$ برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ ۲m+۱ دقیق باشد. واضح است که این روش از روشهای متناظر در روش نیوتن-کوتز دقیقتر است.

۵-۶-۳ فرمول قاعدهٔ دو نقطه‌ای گاوس

به دلایلی که بعداً شرح می‌دهیم، فرمولهای گاوس را برای بازه [۱,۱-] به دست می‌آوریم. واضح است که بازه‌های [a,b] و [۱,۱-] را به سادگی می‌توان به هم تبدیل کرد. با تغییر متغیر

$$x = \frac{۱}{۲}\left[(b-a)u + (b+a)\right]$$

به دست می‌آوریم: $dx = \frac{(b-a)}{۲}\,du$ و

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-۱}^{۱} \psi(u)\,du$$

که در آن

$$\psi(u) = \frac{(b-a)}{۲} f\left(\frac{۱}{۲}((b-a)u + (b+a))\right)$$

پس، فرمول دو نقطه‌ای گاوس را برای

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx$$

به دست می‌آوریم.

می‌خواهیم داشته باشیم

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{1} w_k f(x_k) + E$$

برای تعیین x_0، x_1، w_0 و w_1 قرار می‌دهیم $E=0$ برای

$f(x) = 1, x, x^2, x^3$

همان طور که در روش نیوتن ـکوتز عمل کردیم، در اینجا نیز دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$f(x)=1: \qquad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = w_0 + w_1 \tag{1}$$

$$f(x)=x: \qquad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \tag{2}$$

$$f(x)=x^2: \qquad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \tag{3}$$

$$f(x)=x^3: \qquad \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \tag{4}$$

مشاهده می‌شود که چهار معادله و چهار مجهول داریم که نسبت به w_0 و w_1 خطی ولی نسبت به x_0 و x_1 غیرخطی هستند (مشکل حل این دستگاهها تا مدتی مانع از کاربرد آنها بود). این دستگاه را به طریق زیر حل می‌کنیم.

معادلهٔ (۲) را در x_0^2 ضرب و با معادله (۴) جمع می‌کنیم تا حاصل شود

$w_1 x_1^3 - w_1 x_0^2 x_1 = 0$

بنابراین، باید داشته باشیم

$$w_1 x_1 (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = 0 \tag{5}$$

در زیر ثابت می‌کنیم که تنها $(x_1+x_0)=0$ و بقیهٔ عوامل سمت چپ تساوی (۵) مخالف صفر هستند. این مطلب را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید

$$w_1 x_1 = 0 \tag{6}$$

از این تساوی و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$w_0 x_0 = 0 \tag{7}$$

(۶) و (۷) و (۳) نتیجه می‌دهند

$$\frac{۲}{۳} = ۰$$

که یک تناقض است. پس فرض $w_۱x_۱ = ۰$ باطل است و $w_۱x_۱ \neq ۰$. بازهم فرض می‌کنیم $x_۱ - x_۰ = ۰$ که از آن نتیجه می‌شود

$$x_۱ = x_۰ \qquad (۸)$$

(۸) و (۲) نتیجه می‌دهند

$$۰ = (w_۰ + w_۱)\ x_۱$$

که با توجه به (۱) نتیجه می‌گیریم

$$۰ = ۲x_۱$$

که خلاف $w_۱x_۱ \neq ۰$ است (چرا؟) پس $x_۱ - x_۰ \neq ۰$

از این رو، باید داشته باشیم

$$x_۱ + x_۰ = ۰$$

یعنی،

$$x_۱ = -x_۰$$

چون x و $x_۱$ صفر نیستند و معمولاً $x_۰$ کوچکتر از $x_۱$ فرض می‌شود

$$x_۱ > ۰ \quad , \quad x_۰ < ۰ \qquad (۱۰)$$

از (۹) و (۳) به دست می‌آوریم

$$\frac{۲}{۳} = w_۰x_۰^۲ + w_۱x_۰^۲ = (w_۰ + w_۱)x^۲_۰$$

که با توجه به (۱) نتیجه می‌دهد

$$x^۲_۰ = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین، با توجه به (۱۰)،

$$x_۰ = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

و

$$x_۱ = -x_۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}.$$

ضمناً از (۹) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$۰ = w_۰x_۰ - w_۱x_۰ = (w_۰ - w_۱)x_۰$$

که چون $x_۰ \neq ۰$ نتیجه می‌دهد

$$w_۰ - w_۱ = ۰$$

از (۱) و (۱۱) به دست می‌آوریم

$$w_\circ = w_\text{۱} = \text{۱}$$

بنابراین، فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از

$$\int_{-\text{۱}}^{\text{۱}} f(x)\,dx \simeq w_\circ f(x_\circ) + w_\text{۱} f(x_\text{۱}) = f\left(-\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}\right) + f\left(\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}\right) \qquad (\text{۵۶.۵})$$

این فرمول برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ سوم دقیق است (مطابق آنچه عمل کردیم) و تنها از دو مقدار تابع استفاده می‌کند. بنابراین، قاعدهٔ دو نقطه‌ای گاوس از نظر دقت و خطا تقریباً نظیر قاعده سیمسون است که از سه مقدار تابع استفاده می‌کند، در نتیجه از آن بهتر است.

خوشبختانه مقادیر $x_\circ$، $x_\text{۱}$، ...، و $w_\circ$، $w_\text{۱}$، ... حساب شده‌اند و در جدولهایی در اختیار استفاده‌کنندگان از این روش قرارمی‌گیرند. جدول (۵-۵) این مقادیر را نشان می‌دهد.

از جمله خصوصیات این دسته از فرمولهای انتگرالگیری گاوس این است که اگر m فرد باشد تعداد نقاط زوج است و داریم

$$\begin{cases} x_{m-i} = -x_i, \\ w_{m-i} = w_i, \end{cases} \qquad i = \circ, \text{۱}, \ldots, \frac{m-\text{۱}}{\text{۲}}$$

(۵۷.۵)

و اگر m زوج باشد تعداد نقاط فرد است و داریم

$$\begin{cases} x_{m-i} = -x_i & i = \circ, \text{۱}, \ldots, \frac{m}{\text{۲}} - \text{۱} \\ x_{\frac{m}{\text{۲}}} = \circ & \\ w_{m-i} = w_i & i = \circ, \text{۱}, \ldots, \frac{m}{\text{۲}} - \text{۱} \end{cases} \qquad (\text{۵۸.۵})$$

خصوصیات مندرج در (۵۷.۵) و (۵۸.۵) در جدول (۵-۵) آمده است. (برای اثبات مطالب بالا می‌توانید به [۲۰] مراجعه کنید.)

جدول (۵-۵)

m	x_i	w_i
۱	$x=-x_\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$w_۱=w_\circ=۱$
۲	$x_۱=\circ$	$w_۱=\frac{۸}{۹}$
	$x_۲=-x_\circ=\sqrt{\frac{۳}{۵}}$	$w_۲=w_\circ=\frac{۵}{۹}$
۳	$x_۲=-x_۱\simeq$ ۰/۳۳۹۹۸۱۰۴	$w_۲=w_۱\simeq$ ۰/۶۵۲۱۴۵۱۵
	$x_۳=-x_\circ\simeq$ ۰/۸۶۱۱۳۶۳۱	$w_۳=w_\circ=$ ۰/۳۴۷۸۵۴۸۵
۴	$x_۲=\circ$	$w_۲=$ ۰/۵۶۸۸۸۸۸۹
	$x_۳=-x_۱=$ ۰/۵۳۸۴۶۹۳۱	$w_۳=w_۱=$ ۰/۴۷۸۶۲۸۶۷
	$x_۴=-x_\circ=$ ۰/۹۰۶۱۷۹۸۵	$w_۴=w_\circ=$ ۰/۲۳۶۹۲۶۸۹

از خصوصیات بارز فرمولهای انتگرالگیری گاؤس آن است که تمام ضرایب w_i مثبت هستند و مهمتر این که $|w_i| \leq ۱$. این ویژگی و دقت بالای این فرمولها استفاده از آنها را اجتناب ناپذیر می‌کند. تنها اشکال روش انتگرالگیری گاؤس استفاده از بازهٔ [۱،۱-] است که $\int_a^b f(x)\,dx$ ابتدا به $\int_{-۱}^{۱}\psi(u)\,du$ تبدیل شود. اشکال دیگر، که با ظهور کامپیوترها عمده نیست، اصم بودن نقاط و ضرایب است که استفاده از این روشها را با دست خسته‌کننده می‌کند. ولی با یک برنامهٔ کامپیوتری می‌توان یکبار، و برای همیشه، نقاط و ضرایب را به کامپیوتر داد و برای همیشه از آنها استفاده کرد.

۵-۶-۴ مثال

۱- با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای گاوس تقریبی از انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I=\int_۱^۳ \frac{\sin^۲ x}{x}\,dx$$

حل: با تغییر متغیر $x=u+۲$ داریم

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\sin^{2}(u+2)}{u+2}du$$

که با توجه به جدول (۵ـ۵)، به ازای $n=3$، به دست می‌آوریم

$$I\simeq 0/7942833.$$

۲ـ فرمول چهار نقطه‌ای گاؤس را برای محاسبهٔ تقریبی از انتگرال زیر به کار برید

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$$

حل: با تغییر متغیر $x=\frac{\pi}{4}(u+1)$ به دست می‌آوریم

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi(u+1)}{4}du=1/000000$$

می‌توانید تحقیق کنید که تقریب ۱/۰۰۰۰۰۰ را با ۶۵ نقطه و به قاعدهٔ سیمسون می‌توان به دست آورد!

۵ـ۶ـ۵ خودآزمایی

۱ـ با توجه به خصوصیات مربوط به نقاط و ضرایب فرمولهای نیوتن ـ کوتز، فرمول پنج نقطه‌ای نیوتن ـ کوتز را به دست آورید (*راهنمایی*: در واقع باید، w_0، w_1 و w_2 را چنان پیدا کنید که

$$\int_{0}^{4h}f(x)\,dx=w_0 f(0)+w_1 f(h)+w_2 f(2h)+w_1 f(3h)+w_0 f(4h)+E$$

سپس برای به دست آوردن مجهولات قراردهید $E=0$ وقتی که $f(x)=1,x^2,x^4$).

۲ـ فرض کنید در تقریب زیر معیار دقت آن باشد که فرمول برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ ۳ دقیق باشد

$$\int_{0}^{6}f(x)\,dx\simeq\sum_{i=0}^{3}w_i f(x_i)$$

که در آن $x_\circ=\circ$، $x_1=2$، $x_2=5$ و $x_3=6$. مطلوب است محاسبهٔ w_iها. این روش با کدام یک از روشهای نیوتن ـ کوتز قابل مقایسه است؟

۳ـ تقریبی از انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمولهای ۴ نقطه‌ای و ۵ نقطه‌ای نیوتن ـ کوتز حساب کنید.

(آ) $\displaystyle\int_\circ^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ (ب) $\displaystyle\int_\circ^1 xe^x\, dx$

۴ـ ثابت کنید فرمول قاعدهٔ یک نقطه‌ای گاوس چنین است:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq 2f(\circ)$$

و این که این قاعده همان قاعدهٔ نقطهٔ میانی برای $\int_a^b f(x)\,dx$ است.

۵ـ فرمول سه نقطه‌ای گاوس را، با استفاده از خصوصیات نقاط و ضرایب آن حساب کنید.
(راهنمایی: $x_1=\circ$ از این رو، تنها باید $x_\circ$ و $w_\circ$ و w_1 را چنان پیدا کنید که

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_\circ f(x_\circ) + w_1 f(\circ) + w_\circ f(-x_\circ) + E$$

بعد برای به دست آوردن مجهولات قرار دهید $E=\circ$ وقتی که $f(x)=1, x^2, x^4$).

۶ـ برای تعیین تقریبهایی از انتگرالهای زیر از فرمولهای دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای گاوس استفاده و خطای مقادیر به دست آمده را تعیین کنید.

(آ) $\displaystyle\int_\circ^1 x^5 dx$ (ب) $\displaystyle\int_\circ^1 \frac{du}{1+u}$ (پ) $\displaystyle\int_\circ^1 \frac{dx}{1+x^2}$

۷ـ۵ تمرینهای تستی

زمان پاسخگویی به هر تست دو دقیقه است.

۱ـ اگر $f'_i \simeq \frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ خطای این تقریب متناسب با چه توانی از h است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲ـ خطای $\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$ به عنوان تقریبی از f'_i متناسب با کدام است؟

۱) h^2 ۲) h ۳) h^3 ۴) h^0

۳ـ قاعدهٔ سیمسون برای کدام چندجمله‌ایها دقیق است؟

۱) تا درجهٔ یک ۲) تا درجهٔ ۳ ۳) تا درجهٔ دو ۴) x^3

۴ـ در صورتی که بدانیم $T_{01}=2/6$ و $T_{02}=2/7$ مقدار T_{11}، که به قاعدهٔ رامبرگ به دست می‌آید، کدام است؟

۱) $\frac{82}{30}$ ۲) $\frac{77}{30}$ ۳) ۲/۵۷ ۴) هیچکدام

۵ـ اگر $F(1)=1$، $F(1/1)=1/6$ و $F(1/2)=1/9$ تقریبی از $\int_1^{1/2} F(x)\,dx$، به قاعدهٔ‌سیمسون، با $h=0/1$ کدام است؟

۱) ۰/۱۳۵ ۲) ۰/۲۷ ۳) ۰/۳۱ ۴) ۰/۶۲

۶ـ فرمول دو نقطه‌ای گاوسی از نظر دقت با کدام یک از روشهای زیر قابل مقایسه است؟

۱) روش ذوزنقه‌ای ۲) روش سیمسون ۳) روش مستطیلی ۴) روش نقطهٔ میانی

۷ـ فرض کنید $h>0$، کدام یک از فرمولهای زیر برای تعیین تقریبی از $f''(x_0)$ مناسب است؟

۱) $\frac{1}{h^2}[f(x_0-h) - f(x_0) + f(x_0+h)]$

۲) $\frac{1}{h^2}[2f(x_0-h) - f(x_0) + f(x_0+h)]$

۳) $\frac{1}{h}[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)]$

۴) $\frac{1}{h}[2f(x_0-h) - f(x_0) + 2f(x_0+h)]$

۸ـ اگر از روش سیمسون با $h=0/5$ برای محاسبهٔ تقریبی از $\int_0^2 (10x^3+0/1x+1)\,dx$ استفاده کنیم، مقدار خطای مرتکب شده برابر است با

۱) 3×10^{-4} ۲) صفر ۳) $0/45$ ۴) 10^{-4}

۹ـ تخمین $\int_a^b f(x)\,dx \simeq w_1 f(t)$ را در نظر بگیرید. برای آن که این تخمین برای توابع چند جمله‌ای از درجهٔ کوچکتر یا مساوی یک دقیق باشد مقادیر w_1 و t چه باید باشند؟

۱) $w_1=\frac{b-a}{2}\ ,\ t=\frac{a+b}{2}$ ۲) $w_1=b-a\ ,\ t=b$

۳) $w_1=b-a\ ,\ t=\frac{a+b}{2}$ ۴) $w_1=b-a\ ,\ t=a$

۱۰ـ روش رامبرگ برای انتگرالهای تقریبی از چه جهت حائز اهمیت است؟
۱) با استفاده از مشتقات تابع دقت انتگرالگیری افزایش می‌یابد.
۲) روشهای کلاسیک مانند مستطیلی، نقطهٔ میانی و سیمسون را به کار نمی‌گیرد.
۳) از نقاط متساوی الفاصله استفاده نمی‌کند.
۴) با افزایش تعداد نقاط در فاصلهٔ انتگرالگیری و ترکیب روشهایی با مرتبهٔ خطای معین به روشی با خطای کمتر دست می‌یابد.

۸ـ۵ مسائل تکمیلی

۱ـ فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب $f(x)$ درنقاط x_i و x_{i+1} باشد و $h=x_{i+1}-x_i$. با استفاده از عبارت خطای $f(x)-P(x)$ و پیوسته بودن $f''(x)$ در $[x_i,x_{i+1}]$ ثابت کنید مقداری چون ξ_i وجود دارد به طوری که $x_i\le\eta_i\le x_{i+1}$ و

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx-\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx=-\frac{h^3}{12}f''(\eta_i)$$

۲ـ ضرایب w_i، $i=1,2,3$، را در فرم انتگرالگیری ذیل، که برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ دو دقیق است، به دست آورید.

$$\int^{h} f(\sqrt{x})\,dx \simeq w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(h)$$

۳ـ ضرایب w_i در فرمول انتگرالگیری تقریبی زیر را به گونه‌ای بیابید که برای هر تابع چندجمله‌ای تا درجهٔ دوم دقیق باشد. (k عددی حقیقی است)

$$\int_0^{\pi} \cos(kx) f(x)\,dx \simeq w_1 f(0) + w_2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) + w_3 f(\pi)$$

دستگاهی که برای تعیین w_i ها حاصل می‌شود بنویسید و آن را به ازای $k=10$ حل کنید. فرمول فوق را برای $f(x)=\cos 4x$ و $k=10$ به کار ببرید و تقریبی از انتگرال این تابع را به دست آورید.

۴ـ فرض کنید $x_i=x_1+(i-1)h$ که در آن $h>0$. تخمین $\int_{x_1}^{x_4} f(x)\,dx$ با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب خطی $P(x)$ در نقاط x_2 و x_3 به $f(x)$ موردنظر است. قراردهید: $I_A=\int_{x_1}^{x_4} P(x)dx$ و نشان دهید که می‌توان I_A را به صورت زیر نوشت

$$I_A = h\,[w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)]$$

مقادیر w_2 و w_3 را پیدا کنید.

۵ـ فرمول تقریبی زیر داده شده است

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \simeq A_1 f(0) + A_2 f(\pi)$$

الف ـ A_1 و A_2 را چنان بیابید که این رابطه برای توابعی به شکل
$f(x) = a+b\cos x$

دقیق باشد.

ب ـ ثابت کنید فرمول

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \simeq 2\,(f(0) + f(\pi))$$

برای توابعی به شکل زیر دقیق است

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n} a_k \cos(۲k+۱)x + b_k \sin kx.$$

٦

حل عددی معادلات دیفرانسیل

مقدمه

یکی از مباحث مهم ریاضیات، که کاربرد فراوانی نیز در عمل دارد حل معادلات دیفرانسیل است. در ریاضیات محض وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل و یادگیری فنون و روشهای تحلیلی برای به دست آوردن جواب آنها می‌شود. این کار با دسته‌بندی معادلات انجام می‌گیرد و نشان داده می‌شود که دستهٔ‌خاصی از معادلات را می‌توان به روش تحلیلی حل کرد. اما، همانند وجود تابع اولیه برای توابع، معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی‌توان به روشهای تحلیلی موجود جواب آنها را به دست آورد. حتی اگر بتوان، گاهی اوقات، بعضی معادلات دیفرانسیل ساده جوابی بسیار پیچیده دارند. به عنوان مثال، جواب

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

که پس از محاسبات زیادی به دست می‌آید، عبارت است از

$$\log_e(x^2+y^2) = 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

که اگر بخواهید به ازای مقدار مفروضی از x مقدار y را از آن به دست آورید، به زحمت خواهید افتاد. از این رو، استفاده از روشهای عددی، حتی در مواردی که جواب تحلیلی موجود است، توصیه می‌شود. بررسی روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل موضوع کتابی قطور است، در این مختصر روشهای ساده‌ای را برای حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول با شرط اولیه مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

هدفهای کلی

۱ـ تشریح روش بسط تیلر برای برآورد مقادیر جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_\circ) = y_\circ \end{cases}$$

۲ـ ارائه روش اویلر و پیراستهٔ اویلر
۳ـ شرح روشهای رونگه ـ کوتا و چندگامی

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱ـ برآوردی از مقادیر جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، با شرط اولیه را به یکی از روشهای زیر حساب کند.

(آ) روش بسط تیلر (ب) روش اویلر یا پیراستهٔ اویلر
(پ) روش رونگه ـ کوتا (ت) یکی از روشهای چندگامی

۲ـ دقت روشها و کاربرد هریک را بیان کند.

۶. حل عددی معادلات دیفرانسیل

در این فصل حل عددی دستگاه زیر را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_\circ) = y_\circ \end{cases} \qquad (x \geq x_\circ) \tag{۱.۶}$$

که در آن $f(x,y)$ تابعی دو متغیره و مفروض است و $x_\circ$ و $y_\circ$ نیز معلوم‌اند. روشهایی که در این فصل مورد بررسی قرارمی‌دهیم جملگی عدد مثبت و کوچکی چون h را اختیار می‌کنند و برآوردی از $y(x_\circ+ih)$ را به ازای $i=۱،۲،۳،...$ به دست می‌دهند. از این رو، فرض می‌کنیم y_i مقدار تقریبی $y(x_i)$ باشد و چند روش را برای محاسبهٔ y_i مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

۱ـ۶ روش بسط تیلر

می‌دانیم که $x_۱=x_\circ+h$ و بنابر بسط تیلر

$$y(x_۱) = y(x_\circ + h) = y(x_\circ) + hy'(x_\circ) + \frac{h^۲}{۲!}y''(x_\circ) + \ldots + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_\circ) + \ldots$$

برای پیدا کردن $y_۱$، یعنی تقریبی از $y(x_۱)$، باید سری سمت راست را در **نقطه‌ای قطع**

کنیم، مثلاً، تا مشتق مرتبهٔ pام را نگهداریم. در این صورت، قرارمی‌دهیم (با فرض $(y^{(i)}(x_0)=y_0^{(i)}$

$$y(x_1)\simeq y_1=y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2}y''_0+\dots+\frac{h^p}{p!}y_0^{(p)}$$

دقت y_1 به کوچکی h و بزرگی p بستگی دارد. ضمناً، باید بتوانیم مشتقات y را تا مرتبهٔ p حساب کنیم. اکنون برای محاسبهٔ y_2، تقریبی از $y(x_2)$، دو راه وجود دارد.

راه اول: از y_1 و این که، $x_2=x_1+h$ استفاده می‌کنیم.

$$y(x_2)=y(x_1)+hy'(x_1)+\dots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_1)+\dots$$

و قرار می‌دهیم

$$y(x_2)\simeq y_2=y_1+hy'_1+\dots+\frac{h^p}{p!}y_1^{(p)}$$

این روش را **روش موضعی** می‌نامند که در حالت کلی نتیجه می‌دهد

$$y(x_{i+1})\simeq y_{i+1}=y_i+hy'_i+\dots+\frac{h^p}{p!}y_i^{(p)},\quad i=0,1,2,3,\dots \tag{2.6}$$

راه دوم: با توجه به اینکه $x_2=x_0+2h$، به کمک بسط تیلر داریم

$$y(x_2)=y(x_0+2h)=y(x_0)+2hy'(x_0)+\frac{(2h)^2}{2!}y''(x_0)+\dots+\frac{(2h)^q}{q!}y^{(q)}(x_0)+\dots$$

چون 2h از h بزرگتر است برای به دست آوردن تقریبی از سری سمت راست باید q جمله از آن را اختیار کنیم، که در آن $q>p$. یعنی، قرار می‌دهیم

$$y(x_2)\simeq y_2=y_0+2hy'_0+\dots+\frac{2^qh^q}{q!}y_0^{(q)}$$

و به طور کلی،

$$y(x_{i+1})\simeq y_{i+1}=y_0+(ih)y'_0+\dots+\frac{i^rh^r}{r!}y_0^{(r)}$$

که در آن r با i بزرگ می‌شود، یعنی هرچه i بزرگتر باشد r نیز بزرگتر خواهد شد! ولی چه قدر؟ جواب دقیق مشکل است. این روش را **روش جامع** می‌نامند. معمولاً، به خاطر مشکل بودن

تعیین مقدار مناسب برای α در عمل از روش موضعی استفاده می‌شود.

۶ـ۱ـ۱ مثال

مطلوب است محاسبهٔ برآوردی از $y(۰/۵)$ مشروط بر این که

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases} \qquad (۳.۶)$$

و $h = ۰/۱$ و $p = ۴$

حل: چون $x_0 = ۰$ و $h = ۰/۱$ داریم

$$x_i = ۰ + ih = ۰/۱i \quad , \quad i = ۱, ۲, \ldots$$

ابتدا باید y'' و y''' و $y^{(۴)}$ را حساب کنیم.

$$y'' = ۱ + y' = ۱ + x + y \quad , \quad y''' = y'' = ۱ + x + y \quad , \quad y^{(۴)} = y'' = ۱ + x + y$$

از این رو، بنابر (۲.۶) داریم

$$y(x_{i+۱}) \simeq y_{i+۱} = y_i + h(x_i + y_i) + \frac{h^۲}{۲}(۱ + x_i + y_i) + \frac{h^۳}{۶}(۱ + x_i + y_i) + \frac{h^۴}{۲۴}(۱ + x_i + y_i)$$

با قراردادن $h = ۰/۱$ و ساده کردن، به دست می‌آوریم.

$$y_{i+۱} = ۰/۰۰۵۱۷ + ۰/۱۰۵۱۷x_i + ۱/۱۰۵۱۷y_i$$

در نتیجه

به ازای $i = ۰$ داریم: $y_۱ = ۰/۰۰۵۱۷ + ۰ + ۱/۱۰۵۱۷ \times ۱ = ۱/۱۱۰۳۴$

به ازای $i = ۱$ داریم: $y_۲ = ۰/۰۰۵۱۷ + ۰/۱۰۵۱۷ \times ۰/۱ + ۱/۱۰۵۱۷ \times ۱/۱۱۰۳۴ = ۱/۲۴۲۸۰$

و به همین ترتیب، به ازای $i = ۲،۳،۴$ داریم

$y_۳ = ۱/۳۹۹۷۱$ و $y_۴ = ۱/۵۸۳۶۴$ و $y_۵ = ۱/۷۹۷۴۳$

برای مقایسهٔ این جواب با جواب واقعی دستگاه (۳.۶) می‌دانیم که جواب واقعی عبارت است از

(امتحان کنید)

$$y= ۲e^x - x-۱ \qquad (۴.۶)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$y(۰/۵) = ۱/۷۹۷۴۴ \ (۵D)$$

بنابراین، خطای $y_۵$ حدود ۰/۰۰۰۰۱ است!

اشکال روش تیلر آن است که اگر $p>۱$، در حالت کلی، محاسبهٔ مشتقات مراتب دو به بالای y ممکن است بسیار مشکل باشد. بنابراین، به دنبال روشهای دیگر می‌رویم که از مشتقات y' استفاده نمی‌کنند ولی دقتی هم‌تراز با روش تیلر دارند.

۶ـ۱ـ۲ روش اویلر

یک راه اجتناب از محاسبهٔ مشتقات مراتب بالای y آن است که در بسط تیلر قرار دهیم $p=۱$ که تقریب زیر را نتیجه می‌دهد

$$y_{i+۱} = y_i+hy'_i = y_i+hf(x_i,y_i) \qquad (۵.۶)$$

فرمول (۵.۶)، به **دستور اویلر** معروف است.

۶ـ۱ـ۳ مثال

تقریبی از جواب دستگاه (۳.۶) را به روش اویلر، و با $h=۰/۱$، حساب کنید.

حل: با توجه به این که $h=۰/۱$ و $f(x,y)=x+y$ داریم

$$y_{i+۱}=y_i+۰/۱ \ (x_i + y_i)$$

بنابراین،

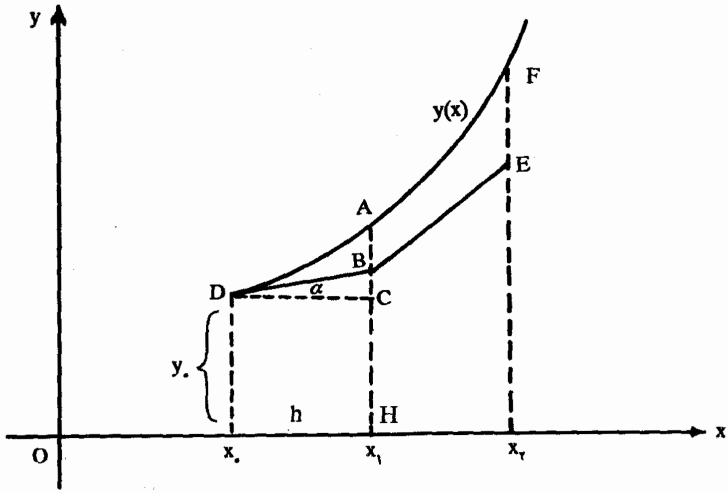
$$y_{i+۱}=۰/۱x_i + ۱/۱y_i \ , \ I = ۰, ۱ , ۲ , ...$$

با توجه به این که $x_i=۰/۱i$ و $y_۰=۱$ به دست می‌آوریم

$$y_۱ = ۱/۱$$
$$y_۲ = ۱/۲۲$$
$$y_۳ = ۱/۳۶۲$$
$$y_۴ = ۱/۵۲۸۲$$
$$y_۵ = ۱/۷۲۱۰۲$$

ملاحظه می‌شود که خطای $y_۵$ حدود ۰/۰۸ است.

در حالت کلی برای این که از روش اویلر جواب نسبتاً دقیق به دست آید، h باید بسیار کوچک باشد. ولی تحلیل زیر نشان می‌دهد که حتی اگر h بسیار کوچک هم باشد باز y_i می‌تواند بسیار دور از $y(x_i)$ باشد. شکل (۶-۱) نحوهٔ به دست آمدن y_1 از y_0 را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۱

در شکل (۶-۱) خط AH بر محور OX عمود و DB مماس بر منحنی $y(x)$ است. در نتیجه

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{h} \quad \text{و} \quad BC=h\operatorname{tg}\alpha\,.$$

اما، $\operatorname{tg}\alpha$ همان y' در نقطهٔ x_0 است. یعنی، $\operatorname{tg}\alpha=f(x_0,y_0)$. پس،

$$BC=h\,f(x_0,y_0)$$

بنابراین، با توجه به این که $CH=y_0$،

$$BH=CH+BC=y_0+hf\,(x_0,y_0)$$

یعنی، $BH=y_1$. به عبارت دیگر، نقطه‌ای که روش اویلر مشخص می‌کند به جای A، B است. در مرحلهٔ بعدی به جای F نقطهٔ E حاصل می‌شود که خطای بیشتری دارد. اویلر روش خود را به طریق زیر بهتر می‌کند.

۶ـ۱ـ۴ روش پیراستهٔ اویلر

با تغییر ساده‌ای در دستور (۵.۶) می‌توان تقریبهای بهتری به دست آورد. برای این منظور چنین عمل می‌کنیم.

الف ـ قرار می‌دهیم

$$y_1^{(\circ)} = y_\circ + h\, f(x_\circ, y_\circ)$$

ب ـ تقریبی از $f(x_1, y(x_1))$ یعنی $f(x, y_1^{(\circ)})$ را حساب می‌کنیم و به جای $f(x_\circ, y_\circ)$ میانگین $f(x_\circ, y_\circ)$ و $f(x_1, y_1^{(\circ)})$ را به عنوان ضریب زاویه در $x_\circ$ می‌گیریم. یعنی قرار می‌دهیم

$$y_1^{(1)} = y_\circ + \frac{h}{2}[f(x_\circ, y_\circ) + f(x_1, y_1^{(\circ)})]$$

و به طور کلی قرار می‌دهیم:

$$y_1^{(r+1)} = y_\circ + \frac{h}{2}(f(x_\circ, y_\circ) + f(x_1, y_1^{(r)})], \quad r = \circ, 1, 2, 3 \tag{۶.۶}$$

معمولاً $y_1^{(3)}$ یا $y_1^{(4)}$ تقریب مناسبی است و آن را y_1 می‌نامیم. سپس همین‌کار را برای محاسبهٔ y_2 انجام می‌دهیم. در مثال زیر این روش عملاً به کار می‌رود.

۶ـ۱ـ۵ مثال

برآوردی از $y(\circ/1)$ و $y(\circ/2)$، که $y(x)$ جواب (۳.۶) است، را با استفاده از روش پیراستهٔ اویلر حساب کنید.

حل: طبق آنچه در (۶ـ۱ـ۴) شرح دادیم، به دست می‌آوریم:

$$y^{(\circ)}_1 = 1/1$$

$$y_1^{(1)} = 1 + \frac{\circ/1}{2}(1 + 1/2) = 1/11$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \frac{\circ/1}{2} + (1 + 1/21) = 1/11\circ5$$

$$y_1^{(3)} = 1 + \frac{\circ/1}{2}(1 + 1/21\circ5) = 1/11\circ525$$

چون اختلاف $y^{(3)}_1$ و $y_1^{(2)}$ خیلی زیاد نیست قرار می‌دهیم

$$y_1=1/110525$$

اکنون به محاسبهٔ y_2 می‌پردازیم. برای این منظور می‌نویسیم

$$y_2^{(0)} = y_1+hf(x_1,y_1)=1/110525 + 0/1 \times 1/210525 = 1/231578$$

و

$$y_2^{(1)} = 1/110525 + \frac{0/1}{2}(1/210525+1/431578) = 1/24263$$

و به همین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$y_2^{(2)} = 1/243283 \quad \text{و} \quad y_2^{(3)}=1/243215$$

و قرار می‌دهیم $y_2=1/243215$. ضمناً، از (۴.۶) به دست می‌آید

$$y(0/2) = 1/242806 \ (6D)$$

که خطای y_2 حدود ۰/۰۰۰۴ است.

۶-۱-۵ خودآزمایی

۱- مقادیر y_3، y_4 و y_5 را، برای دستگاه (۳.۶) به روش پیراستهٔ اویلر حساب و هریک را با مقدار واقعی مقایسه کنید.

۲- تقریبی از جواب دستگاه زیر را، به ازای $h=0/05$، در نقطهٔ $x=1/1$ حساب کنید.

$$\begin{cases} y' = x^2+y \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad (7.6)$$

۳- تقریبی از دستگاه (۷.۶) را، به ازای $h=0/02$، به روش اویلر، در $x=1/1$ حساب و با جواب واقعی دستگاه مقایسه کنید.

۴- اگر $y'=x+2y$ و $y(1)=-1$ مطلوب است محاسبهٔ تقریبی از $y(1/1)$ به ازای $h=0/1$ و به روشهای زیر:

الف - روش اویلر

ب - روش پیراستهٔ اویلر

ج - روش تیلر با $p=2$

۵ـ مسئله ۴ را برای دستگاه ذیل حل کنید

$$\begin{cases} xy' = x - y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

۶ـ۲ روشهای رونگه ـ کوتا

برای به دست آوردن جوابهای دقیقتر برای دستگاه (۱.۶)، با محاسبهٔ تابع $f(x,y)$ در نقاط کمتر، می‌توان از یک دسته فرمول که توسط ریاضیدانان آلمانی به نامهای رونگه و کوتا به دست آمده‌اند استفاده کرد. فرمولهای مذکور دارای مراتب متفاوت هستند. بخصوص فرمول مرتبهٔ چهار رونگه ـ کوتا به طور وسیعی کاربرد دارد. عملیات لازم جهت به دست آوردن این فرمولها نسبتاً پیچیده است. خوانندگان مشتاق می‌توانند به [۱۸]، صفحات ۱۹۵ تا ۲۱۳، مراجعه کنند.

۶ـ۲ـ۱ فرمول مرتبهٔ دوم رونگه ـ کوتا

در روش پیراستهٔ اویلر مشاهده کردیم که y_{i+1} به وسیلهٔ y_i و h برابر میانگین دو مقدار y' بیان شد. فرمول مرتبهٔ دوم رونگه ـ کوتا نیز به همین ترتیب به دست می‌آید. چون $y'=f(x,y)$ قرار می‌دهیم:

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + a k_1 + b k_2$$

سپس a، b، α و β چنان حساب می‌شوند که خطای y_i از مرتبهٔ $O(h^2)$ باشد. ثابت می‌شود که یکی از جوابهای این پارامترها عبارت است از:

$$\alpha=\beta=1 \quad , \quad b=a=\frac{1}{2}$$

که روش پیراستهٔ اویلر را نتیجه می‌دهد و جواب دیگر عبارت است از

$$a=\frac{2}{3} \quad , \quad b=\frac{1}{2} \quad , \quad \alpha=\beta=\frac{3}{2}$$

در نتیجه، روش پیراستهٔ اویلر حالت خاصی از روش رونگه ـ کوتا است.

۶ـ۲ـ۲ فرمول مرتبهٔ چهارم رونگه ـ کوتا

این فرمول عبارت است از:

$$\begin{cases} y_{i+۱}=y_i+\frac{۱}{۶}(k_۱+۲k_۲+۲k_۳+k_۴) \\ k_۱=h\,f(x_i,y_i) \\ k_۲=h\,f(x_i+\frac{۱}{۲}h,y_i+\frac{۱}{۲}k_۱) \\ k_۳=h\,f(x_i+\frac{۱}{۲}h,y_i+\frac{۱}{۲}k_۲) \\ k_۴=h\,f(x_i+h,y_i+k_۳) \end{cases} \qquad (۸.۶)$$

که در آن

فرمولهای رونگه ـ کوتا ظاهراً مفصل و پیچیده به نظر می‌رسند ولی در عمل به سادگی، به کمک یک وسیلهٔ محاسباتی قابل استفاده هستند و خطای کمی نسبت به روشهای دیگر دارند. مثلاً، خطای موضعی (۸.۶) از مرتبهٔ $O(h^۵)$ است، و خطای آن در مجموع $O(h^۴)$ است.

۶ـ۲ـ۳ مثال

تقریبی از $y(۰/۱)$ را با استفاده از فرمول مرتبهٔ چهار رونگه ـ کوتا، برای دستگاه (۳.۶)، حساب کنید.

حل: با استفاده از (۸.۶) و این که $f(x,y)=x+y$ و $y_۰=۱$، داریم (برای $i=۰$):

$$k_۱=۰/۱(۰+۱)=۰/۱$$

$$k_۲=۰/۱(۰/۰۵+۱/۰۵)=۰/۱۱$$

$$k_۳=۰/۱(۰/۰۵+۱/۰۵۵)=۰/۱۱۰۵۰$$

$$k_۴=۰/۱\,(۰/۱+۱/۱۱۰۵۰)=۰/۱۲۱۰۵$$

بنابراین،

$$y(۰/۱)\simeq y_۱=۱+\frac{۱}{۶}(۰/۱+۲\times ۰/۱۱+۲\times ۰/۱۱۰۵+۰/۱۲۱۰۵)$$

$$=۱/۱۱۰۳۴$$

این مقدار با مقدار واقعی، یعنی $۲e^{۰/۱}-۰/۱-۱$، تا ۵ رقم اعشار سازگاری دارد!

جدول (۶ـ۲) مقایسه‌ای بین خطای روشهای متفاوت و تعداد دفعاتی که تابع $f(x,y)$ باید حساب شود را نشان می‌دهد.

جدول ۶ـ۲

نام روش	اندازهٔ h	نتیجه	خطا	تعداد دفعاتی که f حساب شده است
اویلر	۰/۰۲	۱/۱۰۸۱	۰/۰۰۲۲	۵
پیراستهٔ اویلر	۰/۰۲	۱/۱۱۰۴	۰/۰۰۰۱	۱۲
رونگه ـ کوتا مرتبهٔ چهار	۰/۱	۱/۱۱۰۳۴	۰/۰۰۰۰	۴

این جدول برتری فرمول مرتبهٔ چهار رونگه ـ کوتا را بر روشهای قبلی به خوبی نشان می‌دهد، هم خطای این روش از بقیه کمتر است و هم دفعاتی که تابع f حساب می‌شود.

۶ـ۲ـ۴ خودآزمایی

مسائل ۳ و ۴ از (۶ـ۱ـ۵) را به روش رونگه ـ کوتا مرتبهٔ چهار حل کنید.

* ۶ـ۳ روشهای چندگامی

در روشهایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم y_{i+1} برحسب y_i به دست می‌آمد. یعنی، برای محاسبهٔ تقریبی از $y(x_{i+1})$ تنها از اطلاعات موجود در نقطهٔ x_i استفاده می‌شد، به همین خاطر این روشها برای مسائلی از نوع (۱.۶) ایده‌آل هستند. اما، وقتی y_1 به دست می‌آید، اطلاعات موجود در x_0 و x_1 را می‌توان به کار برد و به همین ترتیب با به دست آوردن y_iهـای جدیدتر می‌توان از اطلاعات بیشتری استفاده و y_{i+1}را حساب کرد. اگر مقادیر حساب شده را، با دوراندیشی، ذخیره کرده باشیم می‌توان از آنها استفاده کرد.

اصولاً در یک روش چندگامی با استفاده از مقادیر قبلی y و یا y'، یک چندجمله‌ای تشکیل می‌دهیم که تابع مشتق را تقریب کند و آن را برای بازهٔ بعدی برونیابی می‌کنیم. تعداد نقاط قبلی که مورد استفاده قرارمی‌گیرند درجهٔ چندجمله‌ای، و در نتیجه مرتبهٔ دقت فرمول حاصل را مشخص می‌کند. معمولاً خطای کل روش حاصل مساوی h به توان درجهٔ چند

جمله‌ای به اضافه یک است.

۶-۳-۱ روش آدِمز

چون

$$y' = f(x,y)$$

می‌نویسیم

$$dy = f(x,y)dx$$

در نتیجه

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy = y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx$$

بنابراین، قرار می‌دهیم:

(۹.۶)

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx$$

برای به دست آوردن مقدار انتگرال سمت راست، تابع $f(x,y)$ را با یک چندجمله‌ای از x که مقدار آن در چندین نقطهٔ قبلی با مقدار $f(x,y)$ یکسان باشد، تقریب می‌زنیم. اگر سه نقطهٔ قبلی را به کار بریم، این چندجمله‌ای درجهٔ دوم و اگر چهار نقطه به کار بریم درجهٔ سوم خواهد بود.

در اینجا چندجمله‌ای درونیاب درجهٔ دوم را در نقاط x_i، x_{i-1} و x_{i-2}، و با استفاده از تفاضلات پسرو، می‌نویسیم

$$f(x,y) = f_i + \theta \nabla f_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2} \nabla^2 f_i$$

که در آن $x = x_i + \theta h$، خواهیم داشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dy = \int_0^1 \left(f_i + \theta \nabla f_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2} \nabla^2 f_i\right) h\,d\theta$$

$$= h\left(f_i + \frac{1}{2}\nabla f_i + \frac{5}{12}\nabla^2 f_i\right)$$

با توجه به این که،

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \qquad , \qquad \nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

فرمول زیر، به نام **فرمول مرتبهٔ سوم ادمز** برای برآورد $y(x_{i+1})$ به دست می‌آید

$$y_{i+1}= y_i+\frac{h}{۱۲} (۲۳f_i - ۱۶f_{i-۱}+۵f_{i-۲}). \qquad (۱۰ ۶)$$

با استفاده از خطای چندجمله‌ای درونیاب می‌توان ثابت کرد که خطای این روش $O(h^۴)$ است.

۶ـ۳ـ۲ مثال

روش ادمز را برای برآورد $y(۰/۶)$، تقریبی از جواب (۳.۶) در $x=۰/۶$ به کار برید. (جدول (۶ـ۳) را مفروض بگیرید.)

حل: برای استفاده از (۶. ۱۰) فرض می‌کنیم که $h=۰/۲$ و قبلاً براوردهایی از $y(۰/۲)$ و $y(۰/۴)$ حساب شده‌اند (به یکی از روشهای تک گامی) از این‌رو، فرض می‌کنیم که جدول مقادیر زیر معلوم است.

جدول (۶ـ۳)

x	y	$y'=x+y=f(x,y)$
۰	۱	۱
۰/۲	۱/۲۴۲۸	۱/۴۴۲۸
۰/۴	۱/۵۸۳۶	۱/۹۸۳۶

از معادلهٔ (۶. ۱۰) و مقادیر جدول (۶ـ۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y\,(۰/۶) &=۱/۵۸۳۶ + \frac{۰/۲}{۱۲} (۲۳\times۱/۹۸۳۶-۱۶\times۱/۴۴۲۸+۵\times۱) \\ &= ۲/۰۴۲۶ \end{aligned}$$

با مقایسهٔ این تقریب با مقدار واقعی زیر

$$y\,(۰/۶)=۲e^{۰/۶} \div ۰/۶-۱=۲/۰۴۴۲۴ \;\; (۵D)$$

معلوم می‌شود که خطا در حدود ۰/۰۰۱۸ است. البته با کاهش **h** می‌توان خطا را کاهش داد.

۶ـ۳ـ۳ روش چهار نقطه‌ای ادمز

اگر برای محاسبهٔ انتگرال موجود در (۶. ۹) از چندجمله‌ای درونیاب **f** در نقاط

$$x_i \;,\; x_{i-۱} \;,\; x_{i-۲} \;,\; x_{i-۳}$$

استفاده کنیم، به دست خواهد آمد (از تفاضلات پسرو استفاده کنید و فرمول را به دست آورید):

$$y_{i+1}= y_i+\frac{h}{24} (55f_i-59f_{i-1}+37f_{i-2}-9f_{i-3}). \qquad (11.6)$$

۶ـ۳ـ۴ مثال

مجدداً تقریبی از $y(0/6)$ را با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای ادمز حساب کنید، با این فرض که جدول مقادیر زیر معلوم است ($h=0/1$):

جدول (۶ـ۴)

x	y	y′=x+y
۰/۲	۱/۲۴۲۸	۱/۴۴۲۸
۰/۳	۱/۳۹۹۷	۱/۶۹۹۷
۰/۴	۱/۵۸۳۶	۱/۹۸۳۶
۰/۵	۱/۷۹۷۴	۲/۲۹۷۴

از فرمول (۱۱.۶) و مقادیر جدول (۶ـ۴) نتیجه می‌شود (امتحان کنید)

$$y(0/6) \sim 2/0442$$

که خطای آن کمتر از 5×10^{-5} است.

روشهای چندگامی بسیار متنوع هستند و استفاده از فرمولهای آنها مستلزم بررسی مفاهیمی چون سازگاری، پایداری و همگرایی است که در این مختصر نمی‌گنجد (ر.ک. [۲۰]).

۶ـ۳ـ۵ خودآزمایی

۱ـ با فرض $h=0/1$ و جدول مقادیر زیر تقریبهایی از $y(0/7)$ به روشهای سه نقطه‌ای و چهار نقطه‌ای ادمز را به دست آورید و این مقادیر را با مقدار واقعی مقایسه کنید.

x	y	y′=x+y
۰/۳	۱/۳۹۹۷	۱/۶۹۹۷
۰/۴	۱/۵۸۳۶	۱/۹۸۳۶
۰/۵	۱/۷۹۷۴	۲/۲۹۷۴
۰/۶	۲/۰۴۴۲	۲/۶۴۴۲

۲ـ فرمول (۱۱.۶) را به دست آورید.

۳ـ برای حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=f(x,y) \quad , \quad y(x_0)=y_0$$

روش زیر را در نظر بگیرید:

$$k_1=f(x_n,y_n)$$
$$k_2=f(x_n+\alpha h,y_n+\beta hk_1)$$
$$y_{n+1}=y_n+hk_2$$

α و β چه مقادیری باشند تا این روش دارای خطای موضعی از مرتبهٔ h^3 باشد؟ (کنکور سال ۱۳۷۲).

حل تمرینهای منتخب

در این قسمت حل بعضی از تمرینها که در کتاب تحت عنوان «خودآزمایی» مطرح شده‌اند ارائه شده است. ضمناً پاسخ تستها نیز داده شده است.

حل تمرینهای فصل اول

۱ـ۲ـ۸

:۱

$$\frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷ \quad , \quad \frac{۱}{۱۳}=۰/۰۷۶۹۲۳$$

$$\frac{۳}{۷}=۰/۴۲۸۵۷۱ \quad , \quad \frac{۲۳}{۱۱}=۲/۰۹$$

:۲

$$۲۵/۳۲=۲۵+\frac{۳۲}{۱۰(۱۰^{۲}-۱)}=۲۵+\frac{۳۲}{۹۹}=\frac{۲۵۰۷}{۹۹}$$

$$۷/۱۲=۷+\frac{۱۲}{۹۹}=\frac{۷۰۵}{۹۹}=\frac{۲۳۵}{۳۳}$$

۱ـ۳ـ۱۳

$$۰/۰۰۶=\frac{۱}{۱۵۰} \quad , \quad ۰/۱۷۸=\frac{۱۷۸-۱}{۹۹۰}=\frac{۱۷۷}{۹۹۰}=\frac{۵۹}{۳۳۰}$$

:۱

A	i	۲A	b=[۲A]	۲A–b
$\frac{۱}{۳}$	۱	$\frac{۲}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$
$\frac{۲}{۳}$	۲	$\frac{۴}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$
$\frac{۱}{۳}$				

$$\frac{۱}{۳}=(۰/\dot{۰}\dot{۱})_{۲}$$

A	i	۲A	b=[۲A]	۲A–b
$\frac{۱}{۷}$	۱	$\frac{۲}{۷}$	۰	$\frac{۲}{۷}$
$\frac{۲}{۷}$	۲	$\frac{۴}{۷}$	۰	$\frac{۴}{۷}$
$\frac{۴}{۷}$	۳	$\frac{۸}{۷}$	۱	$\frac{۱}{۷}$
$\frac{۱}{۷}$				

$$\frac{۱}{۷}=(۰/\dot{۰}۰\dot{۱})_{۲}$$

A	i	A	b=[۲A]	۲A−b
۰/۳	۱	۰/۶	۰	۰/۶
۰/۶	۲	۱/۲	۱	۰/۲
۰/۲	۳	۰/۴	۰	۰/۴
۰/۴	۴	۰/۸	۰	۰/۸
۰/۸	۵	۱/۶	۱	۰/۶
۰/۶				

$$۰/۳=\left(۰/۰\overline{۱۰۰۱}\right)_۲$$

$$۲۷/۸۷۵ = (۱۱۰۱۱/۱۱۱)_۲$$

:۲

A	i	۵A	b=[۵A]	۵A−b
$\frac{۱}{۴}$	۱	$\frac{۵}{۴}$	۱	$\frac{۱}{۴}$
$\frac{۱}{۴}$				

$$\frac{۱}{۴}=(۰/\overline{۱})_۵$$

A	i	۵A	b=[۵A]	۵A−b
$\frac{۱}{۶}$	۱	$\frac{۵}{۶}$	۰	$\frac{۵}{۶}$
$\frac{۵}{۶}$	۲	$\frac{۲۵}{۶}$	۴	$\frac{۱}{۶}$
$\frac{۱}{۶}$				

$$\frac{۱}{۶}=(۰/۰۴)_۵$$

$$\frac{۱}{۳۱}=(۰/۰۰۴)_۵ \quad , \quad ۳۷/۲=(۱۲۲/۱)_۵ \quad , \quad ۰/۵۵=(۰/۲۳)_۵$$

:۳ $\quad \frac{۱}{r-۱} \stackrel{?}{=} (۰/۱)_r$

$$r > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{r} < ۱$$

$$(۰/۱)_r = \frac{۱}{r}+\frac{۱}{r^۲}+\frac{۱}{r^۳}+\dots=\frac{\frac{۱}{r}}{۱-\frac{۱}{r}}=\frac{\frac{۱}{r}}{\frac{r-۱}{r}}=\frac{۱}{r-۱}.$$

$$\frac{۱}{r+۱} \overset{?}{=} (۰/۰S)_r \quad , \quad (S=r-۱)$$

$$r>۱ \quad \Rightarrow r^۲>۱ \Rightarrow \frac{۱}{r^۲}<۱$$

$$\left[۰/۰S\right]_r = \frac{s}{r^۲}+\frac{s}{r^۴}+\frac{s}{r^۶}+\dots = (r-۱)\left[\frac{۱}{r^۲}+\frac{۱}{r^۴}+\frac{۱}{r^۶}+\dots\right]$$

$$= (r-۱)\frac{\frac{۱}{r^۲}}{۱-\frac{۱}{r^۲}} = (r-۱)\frac{\frac{۱}{r^۲}}{\frac{r^۲-۱}{r^۲}} = (r-۱)\frac{۱}{(r-۱)(r+۱)} = \frac{۱}{r+۱}$$

۴: کافی است بسط اعشاری $\frac{۱}{۸۱}$ را به دست آورید.

۵: طبق قضیهٔ ۱ـ۲ـ۴ (اگر بسط اعشاری عدد A مختوم یا نامختوم و متناوب باشد، A یک عدد گویاست.) چون بسط این اعداد نامختوم و نامتناوب است، پس این اعداد گویا نیستند. اگر عدد اول بخواهد متناوب باشد و دورهٔ تناوب آن n رقم داشته باشد چون $۱۰^{۲n}$ عددی طبیعی است، وقتی به آن می‌رسیم ۲n رقم صفر داریم که دوره تناوب از بین آنهاست، یعنی دورهٔ تناوب n صفر است که نامکن است (چرا؟) در مورد دومی هم وقتی به ۲n صفر می‌رسیم همین استدلال کفایت می‌کند.

۱ـ۵ـ۶

:۱

$$۰/۰۰۰۲۰۷ = ۲/۰۷ \times ۱۰^{-۴} \quad , \quad ۱۰\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ \times ۱۰^{۱}$$

$$\frac{۲۰۰}{۳} = ۶/\bar{۶} \times ۱۰^{۱} \quad , \quad ۸۷۰۰۰ = ۸/۷۰۰۰ \times ۱۰^{۴}$$

:۲

$$۲/۷۱۰ \quad (۴S) \quad , \quad ۰/۰۰۱۰ = ۱/۰ \times ۱۰^{-۳} \quad (۲S)$$

$$۱۴/۰۲ = ۱/۴۰۲ \times ۱۰^{۱} \quad (۴S) \quad , \quad ۳/۹۲۰ \quad (۴S)$$

:۳

$$۱/۳۴۷۸ \simeq ۱/۳۴۸ \quad , \quad ۹/۸۴۵۰۰۱ \simeq ۹/۸۴۵$$

$$۲/۳۴۶۵ \simeq ۲/۳۴۶ \quad , \quad ۹۸/۰۰۴۵۰۰۱ \simeq ۹۸/۰۰۵$$

$$۱/۹۹۹۷ \simeq ۲/۰۰۰ \quad , \quad \frac{\pi}{۱۱} \simeq ۰/۲۸۶$$

$$\frac{e}{۹} \simeq ۰/۳۰۲$$

:۴

$$۰/۰۰۷۸۳۴۲ \simeq ۷/۸۳۴ \times ۱۰^{-۳}$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴} \simeq ۴/۳۳۰ \times ۱۰^{-۱}$$

$$\frac{\pi}{۱۰} \simeq ۳/۱۴۲ \times ۱۰^{-۱}$$

$$۱/۰۰۲۸ \simeq ۱/۰۰۳$$

۱۰ـ۶ـ۱

$$e = ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸... \quad , \quad m = ۰$$

$$a_۲ = ۲/۷ \quad , \quad a_۳ = ۲/۷۲ \quad , \quad a_۴ = ۲/۷۱۸ \quad , \quad a_۵ = ۲/۷۱۸۳$$

$$| e - a_k | \overset{?}{\leq} ۵ \times ۱۰^{-k}$$

$$k = ۲ \quad : \quad ۰/۰۱۸۲۸۱۸۲۸... < ۵ \times ۱۰^{-۲} = ۰/۰۵$$

$$k = ۳ \quad : \quad ۰/۰۰۱۷۱۸۱۷۱۶... < ۵ \times ۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۵$$

$$k = ۴ \quad : \quad ۰/۰۰۰۲۸۱۸۲۸... < ۵ \times ۱۰^{-۴} = ۰/۰۰۰۵$$

$$k = ۵ \quad : \quad ۰/۰۰۰۰۱۸۱۷۱۶... < ۵ \times ۱۰^{-۵} = ۰/۰۰۰۰۵$$

$$\delta(a_k) \overset{?}{<} ۵ \times ۱۰^{-k}$$

$$k = ۲ \quad : \quad \frac{۰/۰۱۸۲۸۱۸۲۸}{۲/۷۱۸۲۸۱۸۲} = ۰/۰۰۶۷۲۵۵۰۸۶۶۸$$

$$< ۵ \times ۱۰^{-۲} = ۰/۰۵$$

$$k = ۵ \quad : \quad \frac{۰/۰۰۰۰۱۸۱۷۱۶}{۲/۷۱۸۲۸۱۸۲} = ۰/۰۰۰۰۰۶۶۸۴۷۳۳۲۶$$

$$< ۵ \times ۱۰^{-۵} = ۰/۰۰۰۰۵$$

۱۰ـ۷ـ۱

:۱

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۴...$$

$$a_۲ = ۳/۱ \quad , \quad a_۳ = ۳/۱۴ \quad , \quad a_۴ = ۳/۱۴۲ \quad , \quad a_۵ = ۳/۱۴۱۶$$

$$| \pi - a_k | \overset{?}{\leq} ۵ \times ۱۰^{-k} \quad , \quad m = ۰$$

$$k = ۲ \quad : \quad ۰/۰۴۱۵۹... \leq ۵ \times ۱۰^{-۲} = ۰/۰۵$$

$$\vdots$$

$$k = ۵ \quad : \quad ۰/۰۰۰۰۰۷۳۴۶۴ \leq ۵ \times ۱۰^{-۵} = ۰/۰۰۰۰۵$$

:۲

$$\sqrt{۳}=۱/۷۳۲۰۵۰۸۰۸\ldots \quad , \quad \sqrt{۷}=۲/۶۴۵۷۵۱۳۱۱\ldots$$

با توجه به این که $۵\times۱۰^{-۵}<۱۰^{-۴}$ کافی است تقریبی از $\sqrt{۳}$ و تقریبی از $\sqrt{۷}$ تا ۵ رقم با معنای درست ارائه دهیم. از این رو، گرد شدهٔ $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷}$ تا ۵ رقم با معنا را می‌نویسیم.

$$\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳۲۱ \quad , \quad \sqrt{۷}\simeq ۲/۶۴۵۸$$

:۳

$$a=a_m\times ۱۰^m+\ldots>۰ \quad , \quad \delta(a)\overset{?}{\leq}\frac{۵\times ۱۰^{-n}}{a_m}$$

$$\delta(a)\simeq\frac{e(a)}{a}$$

چون a دارای n رقم با معنای درست است

$$|a-A|\leq ۵\times۱۰^{m-n}$$

$$a=a_m\times۱۰^m+a_{m-۱}\times۱۰^{m-۱}+\ldots>۰$$

چون

$$a=a_{m-۱}\times۱۰^{m-۱}+\ldots>۰$$

$$a\geq a_m\times۱۰^m \quad \text{و} \quad \frac{۱}{a}\leq\frac{۱}{a_m\times۱۰^m}$$

بنابراین

پس،

$$\frac{|a-A|}{a}\leq\frac{۵\times ۱۰^{m-n}}{a}\leq\frac{۵\times ۱۰^{m-n}}{a_m\times ۱۰^m}=\frac{۵\times ۱۰^{-n}}{a_m}$$

$$\delta(a)\leq\frac{۵\times ۱۰^{-n}}{a_m}$$

:۴

$$\sqrt{۱۹}=۴/۳۵۸۸۹۸۹۴۴\ldots$$

$$m=۰ \quad , \quad a_m=۴ \quad : \quad \delta(a)\leq\frac{۵\times ۱۰^{-n}}{a_m}=\frac{۵\times ۱۰^{-n}}{۴}=۱/۲۵\times ۱۰^{-n}$$

لذا، تقریبی چون a از $\sqrt{۱۹}$ اختیار می‌کنیم که n رقم با معنای درست داشته باشد n در این نامساوی صدق کند $\delta(a)\leq۱/۲۵\times۱۰^{-n}<۱۰^{-۴}$. کمترین n برابر ۵ است پس $a=۴/۳۵۸۹$ که خطای نسبی آن ۲×۱۰^{-۷} است! البته $a=۴/۳۵۹$ هم جواب است.

۱ـ۸ـ۱۰

۱: ۲۵/۵۴ ، ۳/۷۱۲ ، ۱/۵۴۳ ، ۰/۵۱۱۲ ، ۰/۱۰۰۱
۹۹۱/۷ ، ۳۲۷/۶ ، ۲۲۵/۰ ، ۷۵/۶۱

الف)

۰/۱۰۰۱ + ۰/۵۱۱۲ = ۰/۶۱۱۳
۰/۶۱۱۳ + ۱/۵۴۳ = ۲/۱۵۴۳ → ۲/۱۵۴
۲/۱۵۴ + ۳/۷۱۲ = ۵/۸۶۶
۵/۸۶۶ + ۲۵/۵۴ = ۳۱/۴۰۶ → ۳۱/۴۱
۳۱/۴۱ + ۷۵/۶۱ = ۱۰۷/۰۲ → ۱۰۷/۰
۱۰۷/۰ + ۲۲۵/۰ = ۳۳۲/۰
۳۳۲/۰ + ۳۲۷/۶ = ۶۵۹/۶
۶۵۹/۶ + ۹۹۱/۷ = ۱۶۵۱/۳ → ۱۶۵۱

ب)

۹۹۱/۷ + ۳۲۷/۶ = ۱۳۱۹/۳ → ۱۳۱۹
۱۳۱۹ + ۲۲۵/۰ = ۱۵۴۴/۰ → ۱۵۴۴
۱۵۴۴ + ۷۵/۶۱ = ۱۶۱۹/۶۱ → ۱۶۲۰
۱۶۲۰ + ۲۵/۵۴ = ۱۶۴۵/۵۴ → ۱۶۴۶
۱۶۴۶ + ۳/۷۱۲ = ۱۶۴۹/۷۱۲ → ۱۶۵۰
۱۶۵۰ + ۱/۵۴۳ = ۱۶۵۱/۵۴۳ → ۱۶۵۲
۱۶۵۲ + ۰/۵۱۱۲ = ۱۶۵۲/۵۱۱۲ → ۱۶۵۳

ج)

۱۶۵۳ + ۰/۱۰۰۱ = ۱۶۵۳/۱۰۰۱ → ۱۶۵۳
۰/۱۰۰۱ + ۰/۵۱۱۲ = ۰/۶۱۱۳
۰/۶۱۱۳ + ۱/۵۴۳ = ۲/۱۵۴۳
۲/۱۵۴۳ + ۳/۷۱۲ = ۵/۸۶۶۳
۵/۸۶۶۳ + ۲۵/۵۴ = ۳۱/۴۰۶۳
۳۱/۴۰۶۳ + ۷۵/۶۱ = ۱۰۷/۰۱۶۳
۱۰۷/۰۱۶۳ + ۲۲۵/۰ = ۳۳۲/۰۱۶۳

$$۳۳۲/۰۱۶۳ + ۳۲۷/۶ = ۶۵۹/۶۱۶۳$$
$$۶۵۹/۶۱۶۳ + ۹۹۱/۷ = ۱۶۵۱/۳۱۱۶۳$$

جوابها متفاوت‌اند. جواب (الف) دقیقتر است، چون به جواب واقعی نزدیکتر است. بنابراین بهتر است اعدا را از کوچک به بزرگ جمع کنیم.

۲: الف) $e(a_1 + ... + a_n) \overset{?}{\leq} e(a_1) + ... + e(a_n)$

طبق قضیهٔ ۱ـ۸ـ۴،

$n=2 : e(a_1+a_2) \leq e(a_1) + e(a_2)$

حکم برای n=۲ برقرار است

فرض استقرا: $n=k \quad : \quad e(a_1+ ... + a_k) \leq e(a_1) + ... + e(a_k)$

حکم استقرا: $n=k+1 \quad : e(a_1 + ... + a_{k+1}) \overset{?}{\leq} e(a_1) + ... + e(a_{k+1})$

$e(a_1 + ... + a_{k+1}) = e((a_1 + ... + a_k) + a_{k+1})$

$\leq e(a_1 + ... + a_k) + e(a_{k+1})$ بنابر قضیه ۱ـ۸ـ۴

$\leq e(a_1) + e(a_2) + ... + e(a_k) + e(a_{k+1}.)$ بنابر فرض استقرا

پس حکم برای کلیهٔ nها برقرار است.

ب) $\delta(a_1 + ... + a_n) \overset{?}{\leq} \mathrm{Max}\left\{\delta(a_1), ..., \delta(a_n)\right\}$

$n=2 \quad : \quad \delta(a_1 + a_2) \leq \mathrm{Max}\left\{\delta(a_1), \delta(a_2)\right\}$

طبق قضیهٔ ۱ـ۸ـ۴، حکم برای n=۲ برقرار است.

فرض استقرا: $n=k \quad : \quad \delta(a_1 + ... + a_k) \leq \mathrm{Max}\left\{\delta(a_1), ..., \delta(a_k)\right\}$

حکم استقرا: $n=k+1 \quad : \delta(a_1 + ... + a_{k+1}) \overset{?}{\leq} \mathrm{Max}\left\{\delta(a_1), ..., \delta(a_{k+1})\right\}$

$$\delta(a_1+\ldots+a_{k+1}) = \delta((a_1+\ldots+a_k) + a_{k+1})$$

بنابر قضیه ۱ـ۸ـ۴ $\le \text{Max}\ \{\delta(a_1+\ldots a_k)\ ,\ \delta(a_{k+1})\}$

$$\delta(a_1+\ldots+a_k) \le \max\{\delta(a_1),\ldots,\delta(a_k)\}$$

بنابر فرض استقرا

$$\le \text{Max}\left\{\delta(a_1),\ldots,\delta(a_k),\delta(a_{k+1})\right\} \quad (*)$$

$$\delta(a_{k+1}) \le \text{Max}\left\{\delta(a_1),\ldots,\delta(a_k),\delta(a_{k+1})\right\} \quad (**)$$

از (*) و (**) داریم:

$$\text{Max}\left\{\delta(a_1+\ldots+a_k),\delta(a_{k+1})\right\}$$
$$\le \text{Max}\left\{\delta(a_1),\ldots,\delta(a_{k+1})\right\}$$

بنابراین،

$$\delta(a_1+\ldots+a_{k+1}) \le \text{Max}\left\{\delta(a_1),\ldots,\delta(a_{k+1})\right\}$$

(ج)

$$\delta(a_1\times\ldots\times a_n) \overset{?}{\le} \delta(a_1)+\ldots+\delta(a_n)$$

$$n=2 \Rightarrow \delta(a_1 a_2) \le \delta(a_1)+\delta(a_2)$$

طبق قضیهٔ ۱ـ۸ـ۷، حکم برای $n=2$ برقرار است.

فرض استقرا: $n=k \Rightarrow \delta(a_1\times\ldots\times a_k) \le \delta(a_1)+\ldots+\delta(a_k)$

حکم استقرا: $n=k+1 \Rightarrow \delta(a_1\times\ldots\times a_{k+1}) \overset{?}{\le} \delta(a_1)+\ldots+\delta(a_{k+1})$

$$\delta(a_1\times\ldots\times a_{k+1}\ a_{+1}) = \delta((a_1\times\ldots\times a_k)\times a_{k+1})$$

بنابر قضیه ۱ـ۸ـ۷ $\le \delta(a_1\times\ldots\times a_k) + \delta(a_{k+1})$

بنابر فرض استقرا $\le \delta(a_1)+\ldots+\delta(a_k)+\delta(a_{k+1})$

۳: می‌دانیم که ریشه‌ها عبارتند از:

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{b^۲-ac}}{۲a}$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{b^۲-ac}}{۲a}$$

فرض می‌کنیم $b>۰$، در این صورت، چون $b^۲$ خیلی از ac بزرگتر است، $\sqrt{b^۲-ac}$ بسیار نزدیک b است و در محاسبهٔ $x_۱$ دو مقدار نزدیک هم، از هم کم می‌شوند که در نتیجه ارقام با معنای درست کم می‌شود و باعث خطا در محاسبهٔ $x_۱$ می‌شود. امّا، در محاسبهٔ $x_۲$ چنین اشکالی پیش نمی‌آید. در نتیجه $x_۲$ را محاسبه می‌کنیم و از رابطهٔ $x_۱x_۲=\frac{c}{a}$ به دست می‌آوریم $x_۱=\frac{c}{ax_۲}$

۴: از شکل پیداست که فاصله مبداء مختصات تا مرکز دایرهٔ بزرگتراند طرفی برابر $\sqrt{۲}$ است و از طرف دیگر برابر است با

$$\sqrt{۲}r+r+۱=r(\sqrt{۲}+۱)+۱$$

$$r(\sqrt{۲}+۱)+۱=\sqrt{۲} \quad \text{یعنی،} \quad r=\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

بنابراین،

ضمناً با توجه به این که $(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)=۱$ مقادیر $V_۱$،$V_۲$،$V_۳$ و $V_۴$ با هم برابرند. با توجه به این که $\pi=۳/۱۴۲$ (۳D) و $\sqrt{۲}=۱/۴۱۴$ (۳D) به دست می‌آوریم:

$$V_۱=\frac{۴\pi}{۳}\left(\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}\right)^۳=۰/۰۲۱۱۳۱۷ \quad (۷D)$$

$$V_۲=\frac{۴\pi}{۳}(\sqrt{۲}-۱)^۶=۰/۰۲۱۰۹۳۴ \quad (۷D)$$

$$V_۳=\frac{۴\pi}{۳(\sqrt{۲}+۱)^۶}=۰/۰۲۱۱۷۰۰ \quad (۷D)$$

$$V_۴=\frac{۴\pi}{۳(۹۹+۷۰\sqrt{۲})}=۰/۰۲۱۱۶۰۴ \quad (۷D)$$

چون در $V_۴$ خطای $\sqrt{۲}$ فقط یک بار در عدد ۷۰ ضرب می‌شود $V_۴$ دقیقترین تقریب است و چون در $\sqrt{۲}-۱$ ارقام بامعنا یکی کم می‌شود و توان این عدد ۶ است $V_۲$ نا دقیقترین تقریب است. اعداد به دست آمده از دقیقترین به نادقیقترین عبارت‌اند از:

$V_۱$	$V_۲$	$V_۳$	$V_۴$
۰/۰۲۱۰۹۳۴	۰/۰۲۱۱۳۱۷,	۰/۰۲۱۱۷,	۰/۰۲۱۱۶۰۴,

۴ـ۹ـ۱

۱ـ برای تابع $\cos x$ داریم:

$$x = \frac{\pi}{۷} \quad : \quad \bar{x} = ۰/۴۴۸۷۹۹ \quad (۶D)$$

بنابراین،

$$\cos\frac{\pi}{۷} \simeq ۱ - ۰/۱۰۰۷۱۰ + ۰/۰۰۱۶۹۰ - ۰/۰۰۰۰۱۱$$

$$\cos\frac{\pi}{۷} \simeq ۰/۹۰۰۹۶۹$$

عددی که ماشین حساب برای $\cos \frac{\pi}{۷}$ می‌دهد ۰/۹۰۰۹۶۸۸۶۷ است.

برای $\log_e(۱+x)$ به ازای $x=\frac{۲}{۳}$ با $\varepsilon = ۱۰^{-۲}$ داریم.

$$\bar{x} = ۰/۶۶۷$$

$$\log_e\left(۱+\frac{۲}{۳}\right) \simeq ۰/۶۶۷ - ۰/۲۲۲ + ۰/۰۹۹ - ۰/۰۴۹$$
$$+ ۰/۰۲۶ - ۰/۰۱۵ + ۰/۰۰۸ - ۰/۰۰۵$$

بنابراین،

$$\log_e(۱+\frac{۲}{۳}) \simeq ۰/۵۰۹$$

جوابی که از ماشین برای $\log\frac{۵}{۳}$ به دست می‌آید ۰/۵۱۰۸۲۵۶ است.

۲ـ در واقع باید سری $S = ۱ - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۵!} - \frac{۱}{۷!} + - \dots$ را با تقریب $۱۰^{-۵}$ حساب کنیم.

$$S \simeq ۱ - ۰/۱۶۶۶۶۷ + ۰/۰۰۸۳۳۳ - ۰/۰۰۰۱۹۸ + ۰/۰۰۰۰۰۳$$
$$S \simeq ۰/۸۴۱۴۷۱.$$

۱۰ـ۱ (پاسخ تستها)

۱ـ گزینهٔ ۳

۲ـ گزینهٔ ۳

۳ـ گزینهٔ ۴

۴ـ گزینهٔ ۳

۵ـ بنابر تعریف، $\delta(a) = \frac{|۱/۵ - ۱/۵۵|}{۱/۵} = \frac{۱}{۳۰}$، پس گزینهٔ ۲ درست است.

۶ـ با توجه به قضیه مربوط به خطای حاصلضرب دو عدد تقریبی

$$\delta_{ab} \leq \delta_a + \delta_b$$

همچنین، با استفاده از مسئله ۶ از ۱ـ۸ـ۱۰ داریم

$$\delta_{\frac{a}{b}} \le \delta_a + \delta_b$$

بنابراین، اگر $y=\frac{ab}{c}$ آن‌گاه

$$\delta_y \le \delta_a + \delta_b + \delta_c$$

و گزینهٔ ۱ درست است.

حل تمرینهای فصل دوم

۲-۲-۱۱

۱: برای معادلهٔ $x^2 \sin x = 1$ ابتدا طرفین را بر x^2 تقسیم کنید تا به دست آید

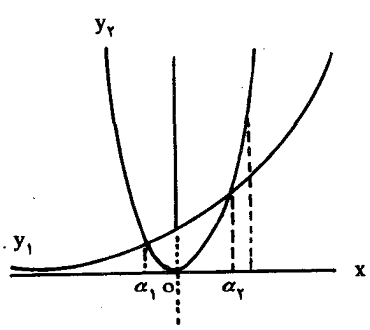
$$\sin x = \frac{1}{x^2}$$

سپس منحنیهای $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \frac{1}{x^2}$ را رسم کنید. تعداد ریشه‌ها بینهایت است و در نزدیکی نقاط $k\pi$ ، $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ قراردارند یک ریشه نیز نزدیک ۱ است. در مورد معادلهٔ $2^x - x^2 = 0$ منحنیهای

$$y_2 = 2^x \ , \ y_1 = x^2$$

را در یک دستگاه رسم کنید. مشاهده خواهید کرد که یک ریشه در $(-1, 0)$ قرار دارد و دو ریشه دیگر ۲ و ۴ هستند. معادلهٔ $e^x + 1 = 0$ ریشه ندارد چون همواره $e^x + 1 > 0$.

۲: برای معادلهٔ $t(x) = e^x - 3x^2 = 0$ منحنیهای $y_1 = e^x$ و $y_1 = 3x^2$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. ظاهراً، معادله دو ریشه دارد ولی وضع دو منحنی در سمت راست معلوم نیست. اگرجدول خواسته شده راکامل کنید نتیجه می‌گیرید که $f(3) < 0$ و $f(4) > 0$ یعنی یک ریشه نیز در $(3, 4)$ است. پس، معادلهٔ $e^x - 3x^2 = 0$ سه ریشه دارد.



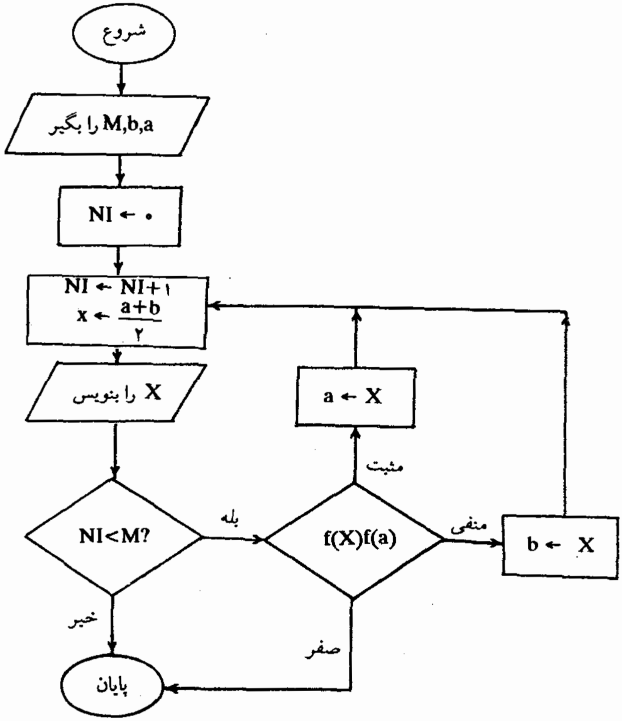
۷-۴-۲

۲: بنابر نامساوی (۹.۲) داریم:

$$|x_n-\alpha| < \frac{b-a}{2^n}$$

لذا، کافی است داشته باشیم $\frac{b-a}{2^n}<10^{-2}$. با توجه به این که برای هر سه تمرین، $b-a=1$ باید داشته باشیم: $\frac{1}{2^n}<10^{-2}$ که از آن $n>6$ به دست می‌آید. بنابراین، قرارمی‌دهیم $n=7$ و ۷ تکرار از روش دو بخشی را انجام می‌دهیم.

۴: نمودار جریان مطلوب چنین است:



۶-۵-۲

۱: در مورد $\cos x=0$ می‌دانیم که ریشه در $(-1,0)$ قراردارد. از این رو داریم:

$$a=-1\,,\ b=0\ ,\ f(-1)\simeq -0/46<0,\ f(0)=1>0$$

بنابراین، اعداد تا سه رقم اعشار گرد شده‌اند،

$$x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{(-1)\times(1)-0\times(-0/46)}{1-(-0/46)}\simeq 0/685$$

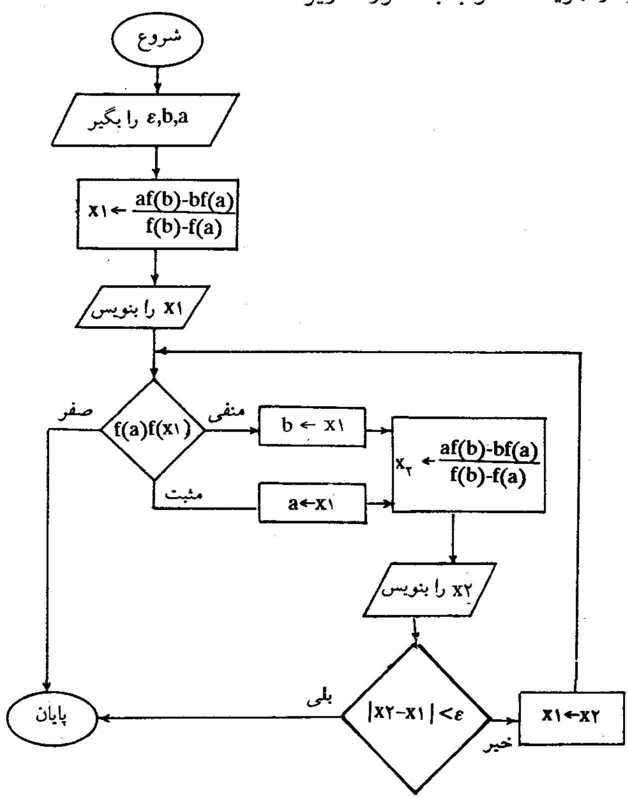
چون، $f(-۰/۶۸۵)\simeq ۰/۰۸۹$ پس ریشه بین $x_۱$ و ۱- است.

بنابراین،

$$x_۲=\frac{(-۱)\times(۰/۰۸۹)-(-۰/۶۸۵)\times(-۰/۴۶)}{۰/۰۸۹-(-۰/۴۶)}\simeq -۰/۷۳۶$$

چون، $f(-۰/۷۳۶)=۰/۰۰۵۰۵<۱۰^{-۲}$ پس جواب تقریبی ۰/۷۳۶- است.

۲: نمودار جریان مطلوب به صورت زیر است:



۹ـ۶ـ۲

۱: در مورد معادله $۲x-\sin x=۱$ قرار می‌دهیم.

$$۲x=\sin x+۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(\sin x+۱)=g(x)$$

بدیهی است که همواره

$$|g'(x)|=\left|\frac{\cos x}{۲}\right|\leq\frac{۱}{۲}$$

ضمناً، به ازای هر x از (۰,۱) داریم: $g(x)\in(۰,۱)$ (نشان دهید). بنابراین، $g(x)$ مناسب است و جملات دنباله عبارت‌اند از (تا چهار رقم اعشار):

$x_۰=۱$

$x_۱=۰/۹۲۰۷$

$x_۲=۰/۸۹۸۰$

$x_۳=۰/۸۹۱۰$

$x_۴=۰/۸۸۸۷$

$x_۵=۰/۸۸۸۲$

$|f(x_۵)|<۴/۷\times ۱۰^{-۴}<۱۰^{-۳}$

در مورد معادلهٔ $x+\log_e x=۰$ با رسم شکل، یا از طریق جدولبندی مقادیر تابع معلوم می‌شود که این معادله فقط یک ریشه در $(\frac{۱}{e},۱)$ دارد. قرارمی‌دهیم:

$\log_e x=x \Rightarrow x=e^{-x}=g(x)$

که از آن نتیجه می‌شود اگر $x\in[\frac{۱}{e},۱]$ آن‌گاه

$|g'(x)|=|e^{-x}|\le e^{-\frac{۱}{e}}\simeq ۰/۶۹<۱$

ضمناً، اگر $x\in[\frac{۱}{e},۱]$ داریم: $g(x)\in[\frac{۱}{e},۱]$ (نشان دهید). بنابراین، $g(x)$ مناسب ولی همگرایی کند است (چرا؟). جملات دنبالهٔ حاصله عبارت‌اند از:

$x_۰=۱$	$x_۷=۰/۵۶۰۱$
$x_۱=۰/۳۶۷۹$	$x_۸=۰/۵۷۱۱$
$x_۲=۰/۶۹۲۲$	$x_۹=۰/۵۶۴۹$
$x_۳=۰/۵۰۰۵$	$x_{۱۰}=۰/۵۶۸۴$
$x_۴=۰/۶۰۶۲$	$x_{۱۱}=۰/۵۶۶۴$
$x_۵=۰/۵۴۵۴$	$x_{۱۲}=۰/۵۶۷۶$
$x_۶=۰/۵۷۹۶$	$x_{۱۳}=۰/۵۶۶۹$

$|f(x_{۱۳})|<۷/۲\times ۱۰^{-۴}<۱۰^{-۳}$

۲: جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ با ضابطهٔ $x_{n+۱}=۲x_n^۲$ و مقدار $x_۰=\frac{۱}{۲}$ عبارت‌اند از:

$$x_n=\frac{۱}{۲}\ ,\ n=۱,۲,...$$

بنابراین، $\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ ریشه‌ای از معادله است. در ضمن در همسایگی $(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴})$ از $\frac{۱}{۲}$ داریم، $g'(x)=۴x>۱$ که نشان می‌دهد $|g'(x)|$ در هیچ همسایگی از $\frac{۱}{۲}$ در شرط $|g'(x)|<۱$ صدق

نمی‌کند. یعنی، شرط $|g(x)| < ۱$ در یک همسایگی از α **یک شرط لازم برای همگرایی** $\{x_n\}$ نیست.

۳: برای ریشه‌های موجود در $(-۱,۰)$, $(۰,۱)$ به ترتیب قرار می‌دهیم

$$g_۱(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{۳}} \quad , \quad g_۲(x) = \sqrt{\frac{e^x}{۳}}$$

که در نتیجه:

$$\left| g'_۱(x) \right| = \frac{e^{\frac{x}{۲}}}{۲\sqrt{۳}} < \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} < ۱ \, , \; -۱ < x < ۰$$

$$\left| g'_۲(x) \right| = \frac{e^{\frac{x}{۲}}}{۲\sqrt{۳}} \leq \frac{e^{\frac{۱}{۲}}}{۲\sqrt{۳}} < \frac{۱}{۲} \, , \; ۰ < x < ۱$$

و جملات مربوطه عبارت‌اند از:

$$x_{n+۱} = -\sqrt{\frac{e^{x_n}}{۳}}$$

$$\begin{aligned}
x_۰ &= -۰/۵ \\
x_۱ &= -۰/۴۴۹۶ \\
x_۲ &= -۰/۴۶۱۱ \\
x_۳ &= -۰/۴۵۸۵ \\
x_۴ &= -۰/۴۵۹۱ \\
\left| x_۴ - x_۳ \right| &= ۰/۰۰۰۶ < ۱۰^{-۳}
\end{aligned}$$

$$x_{n+۱} = \sqrt{\frac{e^{x_n}}{۳}}$$

$$\begin{aligned}
x_۰ &= ۰/۵ \\
x_۱ &= ۰/۷۴۱۳ \\
x_۲ &= ۰/۸۳۶۴ \\
x_۳ &= ۰/۸۷۷۱ \\
x_۴ &= ۰/۸۹۵۲ \\
x_۵ &= ۰/۹۰۳۳ \\
x_۶ &= ۰/۹۰۷۰ \\
x_۷ &= ۰/۹۰۸۶ \\
x_۸ &= ۰/۹۰۹۴ \\
\left| x_۸ - x_۷ \right| &= ۰/۰۰۰۸ < ۱۰^{-۳}
\end{aligned}$$

به سادگی مشاهده می‌شود که $|g'_۱(x)| = |g_۲(x)|$ و هیچ‌کدام، در $(۳,۴)$ از یک کوچکتر نیستند! در نتیجه، برای تعیین ریشهٔ واقع در $(۳,۴)$ باید از $g(x)$ دیگری استفاده کنیم. برای این

منظور قرار می‌دهیم:

$$e^x = ۳x^۲ \quad : \quad x = \log_e ۳x^۲ = \log_e ۳ + ۲\log_e x = g(x)$$

واضح است که اگر $۳<x<۴$ داریم:

$$|g'(x)| = \frac{۲}{x} < \frac{۲}{۳} < ۱$$

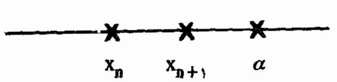
بنابراین، $g(x)$ مناسب است ولی همگرایی کند است. جملات دنباله عبارت‌اند از:

$$x_۰ = ۳/۵$$
$$x_۱ = ۳/۶۰۴۱$$
$$x_۲ = ۳/۶۶۲۸$$
$$x_۳ = ۳/۶۹۵۰$$
$$x_۴ = ۳/۷۱۲۶$$
$$x_۵ = ۳/۷۲۲۰$$
$$x_۶ = ۳/۷۲۷۱$$
$$x_۷ = ۳/۷۲۹۹$$
$$x_۸ = ۳/۷۳۱۴$$
$$x_۹ = ۳/۷۳۲۱$$
$$|x_۹ - x_۸| = ۰/۰۰۰۷ < ۱۰^{-۳}$$

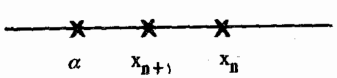
۴: می‌دانیم که:

$$x_{n+۱}-\alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(\eta_n)(x_n-\alpha), \quad (x_n,\alpha \text{ بین } \eta_n)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اگر $g'(\eta_n)$ مثبت باشد $x_n-\alpha$ و $x_{n+۱}-\alpha$ هم علامت هستند. بنابراین، $x_{n+۱},x_n$ در یک طرف α قراردارند یعنی، اگر $x_n>\alpha$ داریم $x_n>x_{n+۱}>\alpha$ یعنی $\{x_n\}$ نزولی است و اگر $x_n<\alpha$ داریم $x_n<x_{n+۱}<\alpha$ یعنی $\{x_n\}$ صعودی است. در صورتی که $g'(\eta_n)$ منفی باشد $x_n-\alpha$ و $x_{n+۱}-\alpha$ مختلف‌العلامه‌اند یعنی، x_n و $x_{n+۱}$ در دو طرف α واقع هستند. در حالتی که $g'(x)>۰$ داریم:



یا



در نتیجه:

$$|x_n-\alpha| = |x_{n+۱}-x_n| + |x_{n+۱}-\alpha|$$

با توجه به این که، بنا به فرض مسئله

$$|x_{n+1}-\alpha| \le L\,|x_n-\alpha| \quad (*)$$

داریم:

$$|x_n-\alpha| \le L\,|x_n-\alpha| + |x_{n+1}-x_n|$$

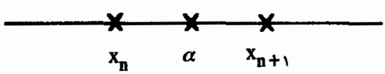
و یا:

$$|x_n-\alpha| \le \frac{1}{1-L}\,|x_{n+1}-x_n|$$

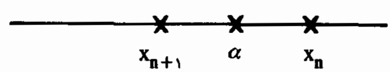
با ضرب این نامساوی در L و استفادهٔ مجدد از (*) نتیجه می‌گیریم که

$$|x_{n+1}-\alpha| \le L\,|x_n-\alpha| \le \frac{L}{1-L}\,|x_{n+1}-x_n|$$

در حالتی که $g'(x_n)<0$ داریم:



یا



در هر صورت

$$|x_{n+1}-\alpha| + |x_n-\alpha| = |x_{n+1}-x_n|$$

با استفاده از (*) داریم:

$$|x_n-\alpha| \ge \frac{1}{L}\,|x_{n+1}-\alpha|$$

$$|x_{n+1}-x_n| \ge |x_{n+1}-\alpha| + \frac{1}{L}\,|x_{n+1}-\alpha| = \frac{L+1}{L}\,|x_{n+1}-\alpha|$$

که از آن نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

۵: چون ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2+x-1=0$ در (۰/۵ , ۰/۷) قرارداد برای آن $m=0$ در نتیجه x_nها را باید تا جایی حساب کنیم که $|x_n-\alpha| \le 5\times 10^{m-3} = 5\times 10^{-3}$

در مورد $g(x)=\frac{1}{x+1}$ داریم: $g'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$.

چون همواره $g'(x)<0$ بنابراین، بنابر نامساوی قسمت (ب) و با تبدیل $n+1$ به n،

$$|x_n-\alpha| \le \frac{L}{1+L}\,|x_n-x_{n-1}|$$

بنابراین، کافی است داشته باشیم:

$$\frac{L}{1+L}\,|x_n-x_{n-1}| < 5\times 10^{-3}$$

ابتدا، ما و بعد جملات دنباله را تا زمانی که نامساوی بالا برقرار باشد حساب می‌کنیم. برای تعیین L می‌گوییم:

$$|g'(x)| = \frac{۱}{(x+۱)^{۲}} \leq \frac{۱}{(۰/۵+۱)^{۲}} = \frac{۱}{۲/۲۵} \simeq ۰/۴۴۴۴$$

که در نتیجه $\frac{L}{۱+L} \simeq ۰/۳۰۷۷$.
جملات به قرار زیرند

$$x_{۰} = ۱$$
$$x_{۱} = ۰/۵$$
$$x_{۲} = ۰/۶۶۶۷$$
$$x_{۳} = ۰/۶$$
$$x_{۴} = ۰/۶۲۵$$
$$x_{۵} = ۰/۶۱۵۴$$
$$x_{۶} = ۰/۶۱۹۰$$
$$\frac{L}{۱+L}|x_{۶} - x_{۵}| \simeq ۰/۰۰۳۶ \times ۶۳۰۷۷ = ۱/۱۰۷۷۲ \times ۱۰^{-۳} < ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

پس $x_{۶}$ جواب مورد نظر است.

۲-۸-۶

۱: قرار می‌دهیم $f(x)=x^{k}-a=۰$ که در نتیجه $f'(x)=kx^{k-۱}$ و از اینجا

$$x_{n+۱} = x_{n} - \frac{x_{n}^{k} - a}{k x_{n}^{k-۱}} = \frac{k-۱}{k}x_{n} + \frac{a}{k x_{n}^{k-۱}}$$

برای تعیین تقریبهای خواسته شده قرار دهید $x_{۰}=۱$ و جملات را، به ازای kهای مناسب، تا زمانی حساب‌کنید که دوجملهٔ متوالی دارای چهار رقم یکسان شوند. مثلاً، در مورد $\sqrt[۳]{۴}$ داریم:

$$x_{۰} = ۱$$
$$x_{n+۱} = \frac{۲}{۳}x_{n} + \frac{۴}{۳x_{n}^{۲}}$$
$$x_{۱} = \frac{۲}{۳} + \frac{۴}{۳} = ۲$$
$$x_{۲} = \frac{۴}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۳}$$
$$x_{۴} = ۱/۰۶۰۷۴ + ۰/۵۲۶۶۷ = ۱/۵۸۷۴۱$$
$$x_{۳} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = ۱/۵۹۱۱۱$$
$$x_{۵} = ۱/۰۵۸۲۷ + ۰/۵۲۹۱۳ = ۱/۵۸۷۴۰$$

بنابراین x_5 جواب مورد نظر است چون چهار رقم آن دقیقاً با x_4 یکسان است.

۴: پس از محاسبهٔ x_1 تا x_8 مشاهده می‌کنید که ویژگی دو برابر شدن ارقام اعشار x_nها رخ نمی‌دهد. علت این است که $\sqrt{2}$ ریشهٔ مضاعف معادله است. زیرا،

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x\left(x^2 - 2\right) \Rightarrow f'\left(\sqrt{2}\right) = 0$$

جملات دنبالهٔ $\{y_n\}$ به قرار زیرند (همگرایی سریع و از مرتبهٔ دو مشاهده می‌شود):

$$y_0 = 1$$

$$y_{n+1} = y_n - 2\frac{y_n^4 - 4y_n^2 + 4}{4y_n\left(y_n^2 - 2\right)} = y_n - 2\frac{y_n^2 - 2}{4y_n} = \frac{2y_n^2 + 4}{4y_n}$$

$$y_1 = 1/5$$

$$y_2 = 1/4167$$

$$y_3 = 1/414182411$$

۲-۱۲ (پاسخ تستها)

۱- برای $P(x) = x^3+x+1$ داریم $P'(x)=3x^2+1>0$ و $P(0)P(-1)<0$ بنابراین، گزینهٔ ۲ درست است.

۲- ریشه‌های مثبت $2^x=x^2$ به ترتیب ۲ و ۴ هستند. گزینهٔ ۱ درست است.

۳- با رسم $y_1=x^3$ و $y_2=\cos x$ معلوم می‌شود که گزینه ۱ درست است.

۴- گزینهٔ ۱ درست است.

۵- معادلهٔ $x\cos x = \sin x$ را، با توجه به اینکه $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ریشهٔ آن نیست، می‌توان به صورت $x=\operatorname{tg} x$ نوشت که بی‌نهایت ریشه دارد. پس گزینهٔ ۲ درست است.

۶- برای معادلهٔ $P(x)=x^3-2x^2+3x+7=0$ داریم $P'(x)=3x^2-4x+3$ که همواره مثبت است (زیرا مبین آن منفی و ضریب x^2 مثبت است و $P(-2)P(-1)<0$). پس معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد و گزینهٔ ۲ درست است.

۷- در مورد معادلهٔ $P(x)=x^3-(1-x)^7=0$ داریم $P'(x)=3x^2+7(1-x)^6>0$ و $P(0)P(1)<0$ پس معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد. از این رو، گزینهٔ ۱ درست است.

۸- گزینهٔ ۳ درست است

۹- گزینهٔ ۳ درست است

۱۰- گزینهٔ ۳ درست است

۱۱- گزینهٔ ۲ درست است

۱۲ـ گزینهٔ ۲ درست است

۱۳ـ اگر قرار دهیم

$$g(x)=۳-۲\log_e(۱+e^{-x})$$

داریم:

$$g'(x)=-۲\times\frac{-e^{-x}}{۱+e^{-x}}=\frac{۲e^{-x}}{۱+e^{-x}}$$

به سادگی مشاهده می‌شود که $g'(x)>۰$ و $g'(x)<۱$ معادل است با

$$e^{-x}<۱$$

و این نامساوی معادل است با $x>۰$ پس باید $x_۰\in(۰,\infty)$ که در نتیجه گزینهٔ ۴ درست است.

۱۴ـ چون ۳- ریشهٔ تکراری (مرتبهٔ دوم) برای $P(x)=۰$ است پس روش نیوتن همگرایی مرتبهٔ یک دارد و گزینهٔ ۱ درست است.

۱۵ـ گزینهٔ ۳ درست است.

حل تمرینهای فصل سوم

۳ـ۴ـ۵

برای چندجمله‌ای قسمت (آ) داریم:

		۳	۱	۰	۰	۱-	۵	
۲	+	۰	۶	۱۴	۲۸	۵۶	۱۱۰	
		۳	۷	۱۴	۲۸	۵۵		$\boxed{۱۱۵=p(۲)}$
۲	+	۰	۶	۲۶	۸۰	۲۱۶		
		۳	۱۳	۴۰	۱۰۸		$\boxed{۲۷۱=p'(۲)}$	

به همین ترتیب برای بقیه عمل کنید.

۲: با توجه به این که

$$p'(z)=q(z)+(z-a)\,q'(z)$$

و

$$p''(z)=q'(z)+q'(z)+(z-a)\,q''(z) \text{ و } p''(a)=2q'(a)$$

در نتیجه، باید $q'(a)$ را حساب کرد و دو برابر آن را به دست آورد. برای محاسبهٔ $q'(a)$ چون در محاسبهٔ $p(a)$ ضرایب $q(x)$ به دست می‌آید مثل این است که بخواهیم $q(a)$ و بعد $q'(a)$ را حساب کنیم، مثلاً، اگر داشته باشیم $p(x)=x^3+x^2-5$ و بخواهیم $p''(1)$ را حساب کنیم داریم:

		۱	۱	۰	۵−
۱	+	۰	۱	۲	۲
					$\boxed{-3=p(1)}$
		۱	۲	۲	
۱	+	۰	۱	۳	
		۱	۳	$\boxed{5=p'(1)=q(1)}$	
۱	+	۰	۱		
			$\boxed{4=q'(1)=\frac{1}{2}p''(1)}$		
		۱			

در نتیجه $p''(1)=8$ که با محاسبهٔ مستقیم هم به دست می‌آید

$$p''(x)=6x+2 \quad \Rightarrow \quad p''(1)=8$$

در هر حالت اگر جدول را k بار ادامه دهید آنچه حساب می‌شود $\dfrac{p^{(k)}(a)}{k!}$ خواهد بود.

۳-۳-۷

۲: با توجه به قضیهٔ ۳-۳-۳ داریم:

$$R=\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2-2\frac{a_{n-2}}{a_n}=9-2\times\frac{-1}{1}=11$$

و

$$r=\frac{۱}{\left(\frac{a_۱}{a_۰}\right)^۲-۲\frac{a_۲}{a_۰}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۹}-۲\times\frac{-۳}{۳}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۹}+۲}=\frac{۹}{۱۹}$$

در نتیجه

$$|z_۱|>\sqrt{\frac{۹}{۱۹}}\quad,\quad |z_۳|<\sqrt{۱۱}$$

۳: بنابر ۳-۳-۲، اگر ریشه‌ها را $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ بنامیم

$$|z_i|\le\frac{\sum_{i=۰}^{۳}|a_i|}{a_۳}=\frac{۲۶}{۴}=۶/۵$$

مشاهده می‌شود که منهای یک، یکی از ریشه‌هاست و داریم:

$$۴z^۳+۴z^۲-۹z-۹=(z+۱)(۴z^۲-۹)=۰$$
$$z=-۱\quad,\quad z=\pm\frac{۳}{۲}$$

بنابراین، در واقع $|z_i|\le\frac{۳}{۲}$

که این کران بالای واقعی، اختلاف زیادی با ۶/۵ دارد. اما، اکنون که می‌دانیم ریشه‌ها حقیقی هستند داریم: $r>z_i^۲<R$

که در آن،

$$R=۱-۲\times\frac{-۹}{۴}=\frac{۱۱}{۲}\quad,\quad r=\frac{۱}{۱-۲\times\frac{۴}{-۹}}=\frac{۹}{۱۷}$$

بنابراین $\frac{۱۱}{۲}>z_i^۲>\frac{۹}{۱۷}$ اما در واقع $۱^۲\le z_i^۲<(۱/۵)^۲$ یعنی $۱\le z_i^۲<۲/۲۵$ مشاهده می‌شود که کرانها بهتر شده‌اند.

۴: اگر شرط مسئله برقرار باشد معلوم می‌شود که $p(z)=p(\frac{۱}{z})$. بنابراین، اگر z_i یک ریشه باشد $\frac{۱}{z_i}$ نیز یک ریشه است و $z_i\times\frac{۱}{z_i}=۱$ بدیهی است که در مرتب کردن ریشه‌ها $\frac{۱}{z_i}$ همان z_{n-i} خواهد بود.

۳-۵-۴

۲: در مورد معادلهٔ $f(x)=x^۲-(۱-x)^۵=۰$ داریم:

$$f'(x)=۲x+۵(۱-x)^۴$$

بنابراین، اگر $x\ge۰$ داریم: $۲x\ge۰$ و $(۱-x)^۴\ge۰$ پس اگر $x\ge۰$، $f'(x)\ge۰$ یعنی تابع f در $[۰,\infty)$

اکیداً صعودی است. چون

$$f(0)=-1<0 \quad , \quad f(1)=1>0$$

بنابراین، معادلهٔ $f(x)=0$ فقط یک ریشهٔ مثبت دارد. اما، اگر $x<0$ داریم:

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-(1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5)\\ &=x^5-5x^4+10x^3-9x^2+5x-1 \end{aligned}$$

چون $x<0$ داریم:

$$x^5 , 10x^3 , 5x<0$$

و $-1<0$, $-9x^2$, $-5x^4$ یعنی $f(x)<0$. پس معادله ریشهٔ منفی ندارد. محاسبهٔ تقریبی از ریشه به عهدهٔ دانشجو است.

حل تمرینهای فصل چهارم

۴_۲_۷

۲: چندجمله‌ای درونیاب با محاسبات لازم چنین به دست می‌آید:

$$P(x)=x^3-1$$

که در نتیجه،

$$f\left(\frac{3}{2}\right)\simeq P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}-1=\frac{19}{8}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)\simeq P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}-1=-\frac{9}{8}.$$

۳: چون $P(-2)=-9$ معلوم می‌شود که با اضافه کردن نقطهٔ $(-2,-9)$ باز هم چندجمله‌ای درونیاب x^3-1 است. ولی این با محاسبات فراوان نتیجه می‌شود، زیرا روش لاگرانژ از ابتدا درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب را مشخص نمی‌کند.

۴: برای تابع $f(x)=1$ چندجمله‌ای درونیاب در $(n+1)$ نقطهٔ

$$x_0 , x_1 , \dots , x_n$$

چنان است که $i=0,1,\dots,n$ و $P(x_i)=1$.

و از طرف دیگر بنابر فرمول لاگرانژ

$$P(x) = f_0L_0(x) + \dots + f_nL_n(x)=L_0(x)+\dots+L_n(x)$$

چون $P(x)-1=0$ دارای $(n+1)$ ریشهٔ $x_0, x_1, \dots, x_n$ است و یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ n فقط n ریشه دارد، نتیجه می‌گیریم که $P(x)-1\equiv 0$ در نتیجه به ازای هر x

$$L_0(x)+\dots+L_n(x)=1$$

۴ـ۳ـ۷

۱: تفاضلات تقسیم شدهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

تفاضلات

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-۱	۱			
۰	-۱	-۲		
۱	-۱	۰	۱	۰
		۲	۱	
۲	۱			

$$P(x)=۱+(x+۱)\times(-۲)+(x+۱)(x-۰)\times۱ = x^{۲}-x-۱$$

اعداد زیر خط مورب پس از اضافه کردن (۲,۱) به دست آمده‌اند. چون تفاضل مرتبهٔ سوم صفر شده است پس درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب تغییر نمی‌کند. با امتحان کردن هم معلوم است که

$$P(۱)=۴-۲-۱=۱$$

۳: تفاضلات تقسیم شده به طریق زیر حساب شده‌اند:

تفاضلات

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
۰	۳					
		-۱				
۱	۲		۳			
		۵		۱		
۲	۷					
			۶		۰	
		۱۷		۱		۰
۳	۲۴					
			۹		۰	
	۵۹	۳۵		۱		
۴			۱۲			
		۵۹				
۵	۱۱۸					

بنابراین، درجهٔ چند جمله‌ای درونیاب ۳ است.

۵ـ۶ـ۴

۱: برای قسمت (ج) داریم:

$$\Delta\left(\frac{f_i}{g_i}\right)=\frac{f_{i+1}}{g_{i+1}}-\frac{f_i}{g_i}=\frac{f_{i+1}g_i-f_ig_{i+1}}{g_ig_{i+1}}$$

$$=\frac{f_{i+1}g_i-f_ig_i+f_ig_i-f_ig_{i+1}}{g_ig_{i+1}}$$

$$=\frac{g_i\left(f_{i+1}-f_i\right)-f_i\left(g_{i+1}-g_i\right)}{g_ig_{i+1}}=\frac{g_i\Delta f_i-f_i\Delta g_i}{g_ig_{i+1}}$$

برای قسمت (د) داریم: $f(x)=\alpha^x$ در نتیجه:

$$\Delta f_i=\alpha^{x_{i+1}}-\alpha^{x_i}=\alpha^{x_i+h}-\alpha^{x_i}=\alpha^{x_i}\left(\alpha^h-1\right)$$
$$=\left(\alpha^h-1\right)f_i$$

در صورتی $\Delta f_i=f_i$ که داشته باشیم:

$\alpha^h-1=1$ یا $\alpha^h=2$

و یا $h=\log_\alpha 2$.

۲: با توجه به این‌که $\Delta=E-1$ داریم:

$$\Delta^kf_i=(E-1)^kf_i=\left[\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}E^{k-r}\right]f_i$$
$$=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}E^{k-r}f_i$$
$$=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}f_{i+k-r}$$

تساوی دوم نیز مشابهاً به دست می‌آید.

۵ـ۷ـ۴

۲: در مورد تابع $f(x)=10^x$ و نقاط $i=0,1,2,3$ و $x_i=i$ جدول تفاضلات زیر را داریم:

x_i	f_i			
۰	۱			
		۹		
۱	۱۰		۸۱	
		۹۰		۷۲۹
۲	۱۰۰		۸۱۰	
		۹۰۰		
۳	۱۰۰۰			

چون تفاضلات مراتب بالا مرتباً بزرگ می‌شوند چندجمله‌ای مناسبی برای تقریب کردن f(x) وجود ندارد.

۳: در مورد (الف)، جدول زیر را برای محاسبهٔ Δx_nها و $\Delta^۲ x_n$ها تشکیل می‌دهیم:

n	x_n	Δx_n	$\Delta^۲ x_n$	$(\Delta x_n)^۲$	x_n^*
۰	۰/۵				
		۰/۳۷۷۶		۰/۱۴۲۶	۰/۷۳۱۴
۱	۰/۸۷۷۶		-۰/۶۱۶۲		
		-۰/۲۳۸۶		۰/۰۵۶۹	۰/۷۳۶۱
۲	۰/۶۳۹۰		۰/۴۰۲۳		
		۰/۱۶۳۷		۰/۰۲۶۸	۰/۷۳۳۷
۳	۰/۸۰۲۷		-۰/۲۷۱۶		
		-۰/۱۰۷۹		۰/۰۱۱۶	۰/۷۳۸۴
۴	۰/۶۹۴۸		۰/۱۸۱۳		
		۰/۰۷۳۴		۰/۰۰۵۴	۰/۷۳۸۸
۵	۰/۷۶۸۲		-۰/۱۲۲۴		
		-۰/۰۴۹۰		۰/۰۰۲۴	۰/۷۳۹۰
۶	۰/۷۱۹۲		۰/۰۸۲۲		
		۰/۰۳۳۲			
۷	۰/۷۵۲۴				

با محاسبه به دست می‌آوریم:

$$f(۰/۷۳۹۰)= ۰/۰۰۰۱۴۲۵ \; (۴S)$$

۴ـ۱۲ (پاسخ تستها)

۱ـ گزینه ۲ درست است

۲ـ نقاط جدولی متساوی‌الفاصله نیستند. تفاضلات تقسیم شده در زیر حساب شده‌اند. پس مقدار $f[-۱,۱,۲]$ برابر است با ۱/۴- پس گزینهٔ ۱ درست است.

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	
۱-	۱/۲-		
		۲/۲	
۱	۳/۲		۱/۴-
		۲-	
۲	۱/۲		۱۶
		۳۰	
۳	۳۱/۲		

۳ـ با توجه به جدول بالا مقدار $f[۱,۲,۳]$ برابر ۱۶ است بنابراین، گزینهٔ ۴ درست است.

۴ـ گزینه ۴ درست است

۵ـ اگر $f(x)=x^{n+۱}$ آنگاه $f^{(n+۱)}(x) = (n+۱)!$ پس

$$f(x) - P(x)=\frac{(x-x_۰)\dots(x-x_n)}{(n+۱)!}\times(n+۱)!$$

پس،

$$x^{n+۱}-P(x)=(x-x_۰)\dots(x-x_n)$$

بنابراین،

$$P(x)=x^{n+۱}-(x-x_۰)\dots(x-x_n)$$

ضریب x^n در $P(x)$ برابر است با $x_۰+x_۱+\dots+x_n$ (تحقیق کنید).

بنابراین، برای این که درجهٔ $P(x)$ از n کمتر باشد باید ضریب x^n یعنی $\sum_{i=۰}^{n} x_i$ صفرباشد. پس، گزینه ۲ درست است.

۶ـگزینهٔ ۳ درست است

۷ـگزینهٔ ۱ درست است

حل تمرینهای فصل پنجم

۵ـ۱ـ۸

۳: در مورد (آ) باید $\frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} - f''_i$ را حساب کنیم. برای این منظور چنین می‌نویسیم:

$$\Delta^۲ f_i = f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + f_i$$

$$f_{i+۲} = f(x_i + ۲h) = f_i + ۲hf'_i + \frac{(۲h)^۲}{۲!}f''_i + \frac{(۲h)^۳}{۳!}f''_i + \frac{(۲h)^۴}{۴!}f_i^{(۴)} + \dots$$

$$f_{i+۱} = f(x_i + h) = f_i + hf'_i + \frac{h^۲}{۲!}f''_i + \frac{h^۳}{۳!}f'''_i + \frac{h^۴}{۴!}f_i^{(۴)} + \dots$$

در نتیجه،

$$\Delta^۲ f_i = h^۲ f''_i + h^۳ f'''_i + \frac{۷h^۴}{۱۲} f_i^{(۴)} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} - f''_i = hf'''_i + \frac{۷}{۱۲}h^۲ f_i^{(۴)} + \dots$$

در مورد (ب)، اولاً داریم:

$$\frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} = f''_i + hf'''_i + \frac{۷h^۲}{۱۲} f_i^{(۴)} + \dots$$

و

$$f''_{i+۱} = f''_i + hf'''_i + \frac{h^۲}{۲} f_i^{(۴)} + \dots$$

بنابراین،

$$\frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} - f''_{i+۱} = \frac{h^۲}{۱۲} f_i^{(۴)} + \dots$$

یعنی، $\frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲}$ تقریب بهتری برای $f''_{i+۱}$ است تا f''_i. قسمت (پ) به دانشجو واگذار می‌شود.

۵ـ۲ـ۵

۲: ابتدا جدول مربوط به تابع را، با گرد کردن اعداد تا چهار رقم اعشار، تشکیل می‌دهیم:

x_i	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
e^{x_i}	۱	۱/۱۰۵۲	۱/۲۲۱۴	۱/۳۴۹۹	۱/۴۹۱۸

$$T(۰/۱)=\frac{۰/۱}{۲}\Big(f(۰)+۲(f(۰/۱)+f(۰/۲)+f(۰/۳))+f(۰/۴)\Big)$$
$$=۰/۰۵\Big(۱+۲(۳/۶۷۶۵)+۱/۴۹۱۸\Big)=۰/۴۹۲۲۴$$

از طرف دیگر

$$\int_۰^{۰/۴} e^x\,dx=e^x\Big|_۰^{۰/۴}=e^{۰/۴}-e^۰=۱/۴۹۱۸۲-۱=۰/۴۹۱۸۲$$

ملاحظه می‌شود که

$$T(۰/۱)-\int^{۰/۴} f(x)\,dx=۰/۰۰۰۴۲$$

۱۳_۲_۵

۱: در مورد (آ) باید h را چنان پیدا کنیم که

$$\frac{(b-a)h^۲}{۱۲}M_۲\le ۰/۰۰۰۱$$

که در آن $M_۲$ یک کران بالای قدر مطلق مشتق دوم تابع e^x است.

اما، $f(x)=e^x$ و $f'(x)=f''(x)=e^x$

$$|e^x|\le e<۳,\quad ۰\le x\le ۱$$

پس، $M_۲=۳$ و باید $h^۲\le ۰/۰۰۰۴$.

که از آن نتیجه می‌شود $h\le ۰/۰۲$. سپس $T(۰/۰۲)$ باید، به وسیلهٔ کامپیوتر، حساب شود. (جواب مسئله ۱/۷۱۸۳۳۹ است.)

۳: اگر

$$\int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)\,dx\simeq hf_{i+۱}$$

داریم:

$$\int_{x_۰}^{x_n} f(x)\,dx=h\left(f_۱+f_۲+\dots+f_n\right)$$

برای محاسبهٔ خطا، در واقع $f(x)$ در $[x_i, x_{i+1}]$ برابر چندجمله‌ای ثابت f_{i+1} انتخاب شده است. پس،

$$f(x) - f_{i+1} = (x - x_{i+1}) f'(\xi_i)$$

بنابراین،

$$E_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h f_{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})\, f'(\xi_i)\,dx$$

اگر f' پیوسته‌باشد، چون $x-x_{i+1}$ در $[x_i, x_{i+1}]$ تغییر علامت‌نمی‌دهد، بنابر ۵ـ۲ـ۶ داریم:

$$E_i = f'(\eta_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})\,dx = f'(\eta_i) \frac{(x - x_{i+1})^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= -\frac{h^2}{2} f'(\eta_i)$$

پس،

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx - h(f_1 + \dots + f_n) = -\frac{h^2}{2} \left(f'(\eta_0) + \dots + f'(\eta_{n-1})\right)$$

اگر

$$\min_{x_0 \le x \le x_n} f'(x) \le f'(\eta_i) \le \max_{x_0 \le x \le x_n} f'(x) = M$$

آن‌گاه

$$m \le \frac{f'(\eta_0) + \dots + f'(\eta_{n-1})}{n} \le M$$

که در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۵ـ۲ـ۷، داریم:

$$f'(\eta_0) + \dots + f'(\eta_{n-1}) = n f'(\eta) \quad , \quad x_0 \le \eta \le x_n$$

پس،

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx - h\left(f_1+\dots+f_n\right) = -\frac{h^2}{2}\times n f'(\eta) = -\frac{(b-a)}{2} h f'(\eta)$$

بنابراین، خطا متناسب با h است و این روش برای توابع ثابت دقیق است.

۴: برای تعیین تقریبی از $\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ باید از فرمول روش مسئله ۳ استفاده کنیم که در آن از f_0 خبری نیست. بنابراین، داریم:

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq 0.02\left(f(0.02)+f(0.04)+f(0.06)+f(0.08)+f(0.1)\right)$$

$$= 0.02\left(7.0711+5+4.0825+3.5355+3.623\right)$$

$$= 0.02\times 22.8514 = 0.4570 \quad (4D)$$

مقدار واقعی چنین حساب می‌شود:

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^{0.1} = 2\sqrt{0.1} = 0.6325 \quad (4D)$$

علت اختلاف زیاد دقت کم روش مسئله ۳ است.

۷-۴-۵

۱: در مورد $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ داریم:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \simeq 0.2\left(f(0.1)+f(0.3)+f(0.5)+f(0.7)+f(0.9)\right)$$

$$= 0.2\left(0.9983+0.9851+0.9586+0.9203+0.8704\right)$$

$$= 0.2\left(4.7327\right) = 0.94654$$

۳: طبق شکل مسئله داریم:

$$\frac{AB}{2} = \sin\frac{\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad AB = 2\sin\frac{\pi}{n}$$

در نتیجه $P_n = 2n \sin\frac{\pi}{n}$ و داریم:

$$P_n = ۲n\left[\frac{\pi}{n} - \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^۳}{۳!} + \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^۵}{۵!} - + \dots\right]$$

بنابراین،

$$F = ۲\pi - \frac{\pi^۳}{۳n^۲} + \frac{\pi^۵}{۶۰n^۴} - + \dots$$

$$۲\pi - P_n = \frac{\pi^۳}{۳n^۲} + \frac{\pi^۵}{۶۰n^۴} - + \dots$$

که با فرض $h=\frac{۱}{n}$ داریم:

$$۲\pi - P_n = \frac{\pi^۳}{۳}h^۲ - \frac{\pi^۵}{۶۰}h^۴ + \dots$$

برای محاسبهٔ تقریبی از ۲π فرض می‌کنیم، به خاطر کوچک بودن h،

$$۲\pi - P_n \simeq \frac{\pi^۳}{۳}h^۲$$

و h را چنان پیدا می‌کنیم که

$$۱۰^۷ \times \frac{\pi^۳}{۳} \leq n^۲ \quad \text{یا} \quad \frac{\pi^۳}{۳}h^۲ \leq ۱۰^{-۷}$$

که از آن به دست می‌آید: $n=۱۰۱۶۷$ و داریم:

$$P_{۱۰۱۶۷} = ۶/۲۸۳۱۸۵۲۰۷$$

خطای $P_{۱۰۱۶۷}$ درست $۱۰^{-۷}$ است!

۴_۵_۵

۲: مقادیر $p_۴$،$p_۸$،$p_{۱۶}$ و $p_{۳۲}$ در زیر حساب شده‌اند و چون خطای p_n همانند خطای $T(h)$ تغییر می‌کند می‌توان از این مقادیر تقریبی، و به قاعدهٔ رامبرگ تقریبهای بهتر حساب کرد.

$p_۴=۵/۶۵۶۸۵۴۳$			
	۶/۲۷۸۲۹۵۱		
$p_۸=۶/۱۲۲۹۳۴۹$		۶/۲۸۳۱۸۰۸	
	۶/۲۸۲۸۷۵۴		۶/۲۸۳۱۸۵۳۷۱
$p_{۱۶}=۶/۲۴۲۸۹۰۳$		۶/۲۸۳۱۸۵۳	
	۶/۲۸۳۱۶۵۹		
$p_{۳۲}=۶/۲۷۳۰۹۷۰$			

مشاهده می‌شود که اختلاف عدد ۶/۲۸۳۱۸۵۳۷۱ که به قاعده رامبرگ به دست آمده با مقدار واقعی، یعنی

۶/۲۸۳۱۸۵۳۰۷ (9D)

برابر است با ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۶۳ که بسیار کوچک است!
و این اعداد با استفاده از محیط حداکثر یک ۳۲ ضلعی حساب شده است.

۵ـ۷ (پاسخ تستها)

۱ـ با توجه به این که

$$f_{i+1}=f_i+hf'_i+\frac{h^2}{2}f''_i+\frac{h^3}{6}f'''_i+\dots$$

داریم:

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f'_i=\frac{h}{2}f''_i+\dots=O(h)$$

پس، گزینهٔ ۲ صحیح است

۲ـ با توجه به این که

$$f_{i+1}=f_i-hf'_i+\frac{h^2}{2}f''_i-\frac{h^3}{3}f'''_i+\dots$$

و بسط f_{i+1} داریم:

$$\cdot f_{i+1}-f_{i-1}=2hf'_i+\frac{h^3}{3}f'''_i+\dots$$

بنابراین،

$$\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}-f'_i=\frac{h^2}{3}f'''_i+\dots$$

بنابراین، گزینه ۱ درست است.

۳ـ می‌دانیم که قاعدهٔ سیمسون برای چندجمله‌ایهای *تا* درجهٔ ۳ دقیق است. در نتیجه، گزینهٔ ۲ صحیح است.

۴ـ داریم:

$$T_{11}=\frac{4T_{02}-T_{01}}{3}=\frac{10.8-2.6}{3}=\frac{83}{30}$$

از این رو، گزینهٔ ۱ درست است.

۵ـ بنابر فرمول قاعدهٔ سیمسون

$$S(0.1)=\frac{0.1}{3}\left(1+4\times 1.6+1.9\right)=0.31$$

بنابراین، گزینهٔ ۳ درست است.

۶ـ چون فرمول دو نقطه‌ای گاوس چهار مجهول دارد پس برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ ۳ دقیق است. بنابراین، گزینهٔ ۲ درست است.

۷ـ با توجه به بسط $f(x_0+h)$ و $f(x_0-h)$ داریم

$$f\left(x_{\circ}+h\right)+f\left(x_{\circ}-h\right)=2f(x_{\circ})+h^{2}f''(x_{\circ})+\frac{h^{4}}{12}f''''(x_{\circ})+\ldots$$

بنابراین،

$$\frac{f\left(x_{\circ}+h\right)-2f(x_{\circ})+f\left(x_{\circ}-h\right)}{h^{2}}=f''(x_{\circ})+\frac{h^{2}}{12}f''''(x_{\circ})+\ldots$$

بنابراین، گزینهٔ ۱ درست است

۸ـ گزینهٔ ۲ درست است

۹ـ این همان قاعدهٔ یک نقطه‌ای گاوس است که معادل نقطهٔ میانی است. بنابراین،

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx\simeq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

و گزینهٔ ۳ درست است.

۱۰ـ اساس روش رامبرگ بر محاسبهٔ تقریبهایی بهتر برای یک انتگرال با استفاده از تخمینهایی با روشهای ساده است. بنابراین، گزینه ۴ درست است.

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

ایتکن	Aitken
ادمز	Adams
ارقام	digits
ـ بامعنا	significant -
استقلال	independence
ـ خطی	linear -
اصلاحگر	corrector
الگوریتم	algorithm
آنالیز عددی	numerical analysis
انتشار	propagation
ـ خطا	error -
انتگرالگیری	integration
عددی	numerical-
اندازه	size
ـ گام	step-
اولیه	initial
مسئلهٔ مقدار ـ	- value problem
اویلر	Euler

ب

بازگشتی (تراجعی)	recurrence
رابطه ـ	- relation
بازه	interval
باقیمانده	remainder
بد وضع	ill-conditioned
برازش منحنی	curre fitting
برونیابی	extrapolation
بسط	expansion
ـ تیلر	Taylor-
بسل	Bessel

پ

پارامتر	parameter
پایدار	stable
روش ـ	-method
پایداری	stability
پیوسته	continuous

ت

تابع	function
ـ پیوسته	continuous-
ـ متعالی	transcendental-
ـ وزن	weight-
تبدیل	transformation
ـ خطی	linear-
تخمین	estimate
ـ خطا	error-

تفاضلات	differences
ـ پسرو	backward-
ـ پیشرو	forward-
ـ مرکزی	central-
ـ تقسیم شده	divided-
ـ متناهی	finite-
تقریب	approximation
ـ کمترین مربعات	least square-
تقسیم	division
ـ ترکیبی	synthetic-
تکرار (بارست)	iteration
ـ تابعی	functional-
تکراری	intrative
ـ تابعی	functional-
روش ـ	- method
توان	power
تیلر	Taylor

ث

ثابت	constant
ـ خطای مجانبی	asymptotic error-

ج

جدول	table
جذر	sqare root
جمله	term
جواب	solution (answer)

چ

چبیشف	Chebyshev
چند جمله‌ای	polynomial
ـ درونیاب	interpolating-
ـ لاگرانژ	lagrange-
ـ لژاندار	legendre-
ـ هم محل	collocation-

ح

حد	Limit
ـ یک تابع	- of a function
ـ یک دنباله	-of a sequence
حساب	arithmetic
ـ ارقام متناهی	finite digits-
ـ ممیز سیار	floating point-

خ

خطا	error
ـ ی برشی	truncation-
ـ تخمین ـ ی‌پسین	posteriori-estimate
ـ ی جامع	global -
ـ ی گرد کردن	rounding -
ـ ی مجتمع	accumulated-
ـ ی مطلق	absolute -
ـ ی موضعی	local -
ـ ی نسبی	relative -
خطی	linear
خوش وضع	well-conditioned

د

داده(ها)	data
درجه	degree
ـ دقت	-of precision
درجه دوم	quadratic
درونیابی	interpolation

ـ خطی	linear-
ـ غیرخطی	nonlinear-
ـ معکوس	inverse-
دستگاه	system
ـ خطی	linear-
دنبال	sequence
دودویی (مبنای دو)	binary
ر	
ردیف	row
رقم	digit
روش	-method
ـ پیراسته	modified-
ـ تکراری	iterative-
ـ تک گامی	single step-
ـ چندگامی	multi step-
ـ دو بخشی (تنصیف)	bisection-
ـ رامبرگ	Romberg-
ـ نابه جایی	false position-
ـ نیوتن ـ رفسون	Newton - Raphson-
ـ وتری (خط قاطع)	secant-
ـ همگرا	convergent -
رونگه ـ کوتا	Runge - Kutta
روشهای ـ	- methods
روند	procedure
ریشه	root
ـ تکراری	multiple-
ز	
زیربازه	subinterval
س	
ستون	column
سری	series
سطر	row
ش	
شرط	condition
شکل	figure (form)
ع	
عدد	number
عددی	numerical
عملگر	operator
ـ انتقال	shift -
ـ تفاضلات پسرو	backward-
ـ تفاضلات پیشرو	forward -
ـ تفاضلات مرکزی	central-
ف	
فاصله	distance
فرمول	formula
ق	
قضیه	theorem
ـ رول	Rolle-
ـ مقدار اکستریم	extreme value-
ـ مقدار میانگین (متوسط)	mean value-
ـ مقدار میانی	intermediate value-
قطع کردن	chopping
قاعده	rule
ـ ذوزنقه‌ای	trapeziod-

- functions	توابع-
- polynomials	چند جمله‌ایهای -
finite	متناهی
- differences	تفاضلات -
order	مرتبه
- of convergence	- همگرایی
multiplicity	مرتبه تکرار (ریشه)
central	مرکزی
- differences	- تفاضلات
independent	مستقل
linear -	- خطی
derivative	مشتق
differntiation	مشتقگیری (دیفرانسیلگیری)
numerical -	- عددی
equations	معادلات
difference -	- تفاضلی
differential-	- دیفرانسیل
nonlinear -	- غیرخطی
equation	معادله
inverse	معکوس
definite	معین
-intergral	- انتگرال
value	مقدار
initial-	- اولیه
average value	مقدار متوسط
floating point	ممیز سیار
- arithmetic	حساب -
curve	منحنی
- fitting	برازش -
Milne	میلن
Romberg-	- رامبرگ
Simpson-	- سیمسون
explicit-	- صریح
implicit-	- ضمنی
Gauss-	- گاوس
midpoint -	- نقطه‌میانی
Newton - Cotes -	- نیوتن - کوتز

ک

effective	کارا
effectiveness	کارایی
complete	کامل
bound	کران
upper bound	- بالا
lower bound	- پایین
least sqare	کمترین مربعات
- approximation	تقریب -
quadrature	کوادراتور (انتگرالگیری)

گ

step	گام
size-	طول -
rounding	گرد کردن
error-	- خطای
discrete	گسسته
Legendre	لژاندار
Laguerre	لاگرانژ

م

mantisa	مانتیس
orthogonal	متعامد

ن	
نابه جایی	false position
ـ روش	- method
ناپایدار	unstable
ناحیه	region
نامتناهی	infinite
ـ انتگرال	- integral
نسبی	relative
ـ خطای	- error
نظریه	theory
ـ تقریب	approximation-
نقطه میانی	midpoint
نقطه، ممیز	point
ممیز ثابت	fixed -
نمایش	representation
ـ اعشاری	decimal -
ـ دو دویی	binary -
ـ ممیز سیار	floating point -
نمو	icrement
نمودار جریان	flow - chart
و	
وابسته	dependent
ـ خطی	linear -
واگرا	divergent
وزن	weight
تابع ـ	- function
ه	
همگرا	convergent
دنباله ـ	- sequence
سری ـ	- series
همگرایی	convergence
مرتبهٔ ـ	order of -
هموار	smooth
تابع ـ	- function
ی	
یکتا	unique
یکتایی	uniqueness
یکنوا	monoton
تابع ـ	- function
یکنواخت	uniform
همگرایی ـ	- convergent

منابع

[۱] احمدی، محمدحسین، *دربارهٔ کسرهای مصری*، رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۳، تابستان ۱۳۷۰.

[۲] بابلیان، اسماعیل، و میرنیا، میرکمال، *نخستین گامها در آنالیز عددی*، نوشتهٔ هاسکینگ و دیگران (ترجمه)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶.

[۳] بابلیان، اسماعیل، *حل عددی معادلات چندجمله‌ای*، رشد آموزش ریاضی، شماره ۱۴ و ۱۳، بهار و تابستان ۱۳۶۶.

[۴] بابلیان، اسماعیل و مالک‌نژاد، خسرو، *محاسبات عددی*، نوشتهٔ پی. دبلیو. ویلیامز (ترجمه)، مؤسسه تحقیقاتی و انتشاراتی نور، چاپ چهارم، ۱۳۷۱.

[۵] بهفروز غلامحسین و میرنیا، میرکمال، *نظریه و کاربرد آنالیز عددی*، نوشته تیلر و دیگران (ترجمه)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۴.

[۶] توتونیان، فائزه، *روشهای محاسبات عددی* (برای رشته‌های کامپیوتر، مهندسی و ریاضی)، نوشتهٔ جان اچ. میتوز (ترجمه)، انتشارات خراسان، مشهد ۱۳۷۱.

[۷] جبه‌دار مارالانی، پرویز و نیکخواه بهرامی، منصور، *آنالیز عددی و روشهای کامپیوتری*، نوشتهٔ پنینگتون (ترجمه)، مؤسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، ۱۳۶۰.

[۸] دیبایی، محمدتقی، *اثبات برخی پدیده‌های اعداد*، رشد آموزش ریاضی، شماره ۲۸، زمستان ۱۳۶۹.

[۹] عالم‌زاده، علی‌اکبر و بابلیان، اسماعیل و امیدوار، محمدرضا، *آنالیز عددی*، نوشتهٔ بردن و دیگران (ترجمه)، انتشارات منصوری ۱۳۶۸.

[۱۰] عالم‌زاده، علی‌اکبر، *آنالیز ریاضی*، نوشتهٔ ت.م. آپوستول (ترجمه)، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، تهران ۱۳۶۹.

[۱۱] فیض، کامران، *مبانی کامپیوتر و برنامه‌ریزی*، بخش اول، انتشارات آزمایشی دانشگاه پیام‌نور، تهران ۱۳۶۸.

[۱۲] کاتبی، سراج‌الدین، *آنالیز عددی مقدماتی به شیوهٔ الگوریتمی*، نوشتهٔ کونت و دیگران (ترجمه) مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۰.

[۱۳] مصاحب، غلامحسین، *آنالیز ریاضی*، انتشارات کتابفروشی دهخدا، تهران ۱۳۶۶.

[۱۴] مصاحب، غلامحسین، *تئوری اعداد*، جلد اول، انتشارات کتابفروشی دهخدا، ۱۳۵۵.

[۱۵] *واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار*، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۷۰.

[16] Fröberg,Carl - Erik *Numerical Mathematies,Theory and Computer Applications*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1985.

[17] Hamming, R.W. *Numerical Mehtods for Scientists and Engineers*. Mc Graw-Hill, New York, 1962.

[18] Kopal,R. *Elements of Differential Equations*.Addison-Wesley Pub.Co. 1995.

[19] Ralston, A. *A First Course in Numercial Analysis*. Mc Graw-Hill, NewYork, 1965.

[20] Ralston, A. and Rabinowiz P. *A first Course in Numerical Analysis*. (2nd ed.) Mc Graw - Hill, New York, 1978.

[21] Wait, R. *The Numerical Solution of Algebraic Equations*. John Wiley & Sons Ltd. 1979.